Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1. *Étude de suites*
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1) $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + a/u_n)$.
2) $0 < u_0 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
3) $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
4) $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.
5) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6) $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}$.
7) $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
8) $u_{n+1} = \sqrt{4-3u_n}$.
9) $u_{n+1} = \dfrac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.
10) $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2+1}$.
11) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^{\alpha}$.
12) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Exercice 2. *Convergence quadratique*
Soit $k \in \mathbb{C}$ fixé. Étudier la convergence de la suite (a_n) définie par : $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_{n+1} = ka_n^2$.

Exercice 3. $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$
Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
Montrer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 4. *Radicaux itérés*
Trouver $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}$ (n radicaux).

Exercice 5. *Radicaux itérés*
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \ldots + u_n}$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 6. *Radicaux itérés*
On pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ et $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.
1) Montrer que ces suites sont convergentes.
2) On note $\lambda = \lim_{n\to\infty}(u_n)$. Montrer que $\lambda - u_n \leqslant \dfrac{n}{2^n\sqrt{n!}}$. Indication : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (a-b)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

Exercice 7. *Suites homographiques*
Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = a + b/u_n$.
On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
1) Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
2) On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.
Étudier la suite $(v_n) = (u_n - \alpha)/(u_n - \beta)$ et en déduire $\lim u_n$.

Exercice 8. *Système d'ordre 1*
Soient $0 < x_0 < y_0$ et (x_n), (y_n) les suites définies par : $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n}$ et $y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n}$.
Montrer qu'elles sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 9. *Système d'ordre 1*
Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par :
$0 < x_0 < y_0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{3}(2y_n + x_n)$.

Exercice 10. *Système d'ordre 1*
Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par :
$0 < y_0 < x_0$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$.

Exercice 11. *Système d'ordre 1*

Soient $0 < a < b$ et $(x_n), (y_n)$ les suites définies par :
$x_0 = a$, $y_0 = b$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ et $y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}$.

1) Montrer que ces suites convergent vers la même limite.

2) On pose $a = b\cos\varphi$. Exprimer cette limite en fonction de b et φ.

Exercice 12. *Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique*

1) Soient $x, y, z \geqslant 0$. Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$ (mettre $x + y + z$ en facteur).

2) Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n) définies par :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{3}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \\ 3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n. \end{cases}$$

Exercice 13. *Centrale MP 2000*

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la suite (u_n), puis la série $\sum u_n$.

Exercice 14. $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Exercice 15. *suites récurrentes, Mines MP 2010*

Soient $a, b, c \in]0, 1[$ et (u_n), (v_n) les suites définies par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_{n+1} = cu_n^2 + (1 - c)v_n^2, \quad v_{n+1} = cv_n^2 + (1 - c)u_n^2.$$

Étudier la convergence de ces suites.

solutions

Exercice 1.

1) $u_n \searrow \sqrt{a}$, et $u_n - \sqrt{a} < \dfrac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.

2) $u_{2n} \to 0$, $u_{2n+1} \to 1$.

3) Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $u_n \searrow 0$, sinon $u_n \searrow -\infty$.

4) $\frac{1}{4} < \alpha$: $u_n \to \infty$.

$-\frac{3}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$: $u_n \to \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

$-1 < \alpha \leqslant -\frac{3}{4}$: un point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

5) Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.

6) $u_n \to \frac{1}{2}$.

7) Thm du point fixe sur $]-\infty, \frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.

8) Si $u_0 \neq 1$, $\exists n$ tq $4 - 3u_n < 0 \Rightarrow$ suite finie.

9) $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.

10) 1 est point fixe, il y a deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

11) $1 < \alpha$: $u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$.

$-1 < \alpha < 1$: $u_n \to 1$.

$\alpha \leqslant -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.

12) $e^{1/e} < \alpha$: $u_n \to \infty$.

$1 < \alpha < e^{1/e}$: deux pts fixes, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, et $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$.

$e^{-e} \leqslant \alpha < 1$: un pt fixe, β, et $u_n \to \beta$.

$\alpha < e^{-e}$: un point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

Exercice 2.

CV (vers 0) ssi $|ka_0| < 1$.

Exercice 4.

$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 5.

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geqslant u_n$. Il n'y a pas de point fixe.

Exercice 8.

$y_n - x_n = \mathrm{c^{te}} \Rightarrow x_n \to 0,\ y_n \to y_0 - x_0$.

Exercice 9.

$y_n - x_n = \dfrac{y_0 - x_0}{3^n}$ et $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \to \frac{1}{2}(y_0 + x_0)$.

Exercice 10.

$x_n y_n = \mathrm{c^{te}} \Rightarrow x_n, y_n \to \sqrt{x_0 y_0}$.

Exercice 11.

2) $\ell = b\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Exercice 12.

1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$.

2) $3c_{n+1} - 3b_{n+1} = a_n + b_n + c_n - 3\sqrt[3]{a_n b_n c_n} \geqslant 0 \Rightarrow b_{n+1} \leqslant c_{n+1}$.

$\dfrac{3}{a_{n+1}} - \dfrac{3}{b_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{a_n b_n c_n}} \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.

Donc (a_n) croît et (c_n) décroît : $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ avec $2a = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, $b^2 = ac$ et $2c = a + b$ d'où $a = b = c$.

Exercice 13.

Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \searrow 0$ et pour $u_0 < 0$ on a $u_n \nearrow 0$. $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$ et la série $\sum u_n$ converge absolument (d'Alembert).

Exercice 14.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle dont tous les éléments sont points fixes par f. S'il y a plusieurs valeurs d'adhérence il faut passer de l'une à l'autre avec une longueur de saut qui tend vers zéro, on doit tomber sur point fixe entre les deux, contradiction.

Exercice 15.

Par récurrence, $u_n, v_n \in]0, 1[$. Soit $w_n = \max(u_n, v_n)$: on a $w_{n+1} \leqslant w_n^2$ et $w_0 < 1$ d'où $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et les deux suites convergent vers 0.