Séries de Fourier

Développements

Exercice 1. *Développements*

Calculer le développement des fonctions f 2π-périodiques telles que :

1) $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$. **2)** $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$. **3)** $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.
4) $f(x) = \max(0, \sin x)$. **5)** $f(x) = |\sin x|^3$.

Exercice 2. *Chimie P' 1996*

Établir la convergence puis calculer $\int_{t=0}^{\pi/2} \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire les coefficients de Fourier de f : $f(t) = \ln|\tan(t/2)|$.

Exercice 3. *Chimie P 1996*

Développer en série de Fourier $f : t \mapsto \dfrac{1}{1 - \cos\alpha \cos t}$ avec $0 < \alpha < \pi$. Indication : on pourra utiliser une relation de récurrence entre les coefficients à partir de $(1 - \cos\alpha\cos t)f(t) = 1$.

Exercice 4. *Mines MP 2002*

Soit $a \in]-1, 1[$ et $g : x \mapsto \dfrac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}$.

1) Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$.
2) Quel est le mode de convergence de la série ?
3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Montrer que $h : x \mapsto \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est somme d'une série trigonométrique uniformément convergente. Que peut-on déduire pour h ?
4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux et 2π-périodiques telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \int_{t=0}^{2\pi} g(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Exercice 5. *Usage d'une série entière*

1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les coefficients de Fourier soient : $a_n = 1/2^n$ et $b_n = 0$?
2) Application : calculer $\int_{t=0}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}t}{5 - 4\cos t}$.

Exercice 6. $1/(\cos x + \operatorname{ch} a)$

Soit $a > 0$.

1) Développer en série entière : $f(x) = \dfrac{1}{x + e^a}$.
2) En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Exercice 7. *Décomposition en* $\sin^2$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| = \dfrac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}$.

Exercice 8. *DSF de $f * g$, Mines PSI 1998*

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que h est 2π-périodique, continue, et calculer les coefficients de Fourier exponentiels de h en fonction de ceux de f et de g.
2) Pour g fixée, déterminer les valeurs et vecteurs propres de $f \mapsto h$.

Exercice 9. *DSF d'une série*

On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2n\pi)^2}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer sa série de Fourier.

Calcul de séries

Exercice 10. *Calcul de séries*

Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = e^x$.

1) Chercher le développement en série de Fourier de f.

2) En déduire les sommes des séries : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n^2+a^2}$ *(Centrale MP 2003)*

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0, 2\pi]$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I(a) = \int_{u=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \sin(au)\,\mathrm{d}u$.

2) Exprimer $I(a)$ sous forme d'une série sans intégrale.

3) Calculer $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\,\mathrm{d}u$.

4) Conclure.

Exercice 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n^2+a^2}$ *(Centrale MP 2000)*

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.

2) Calculer $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$.

3) Que vaut $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a}{a^2+n^2}$?

Exercice 13. *Calcul de séries, Matexo*

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin \frac{x}{2}$ si $0 \leqslant x < 2\pi$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?

3) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Exercice 14. $\sin(\pi a)/\pi a$

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1) Développer en série de Fourier la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = \cos(ax)$.

2) Soit $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - t^2/n^2)$. Justifier l'existence et la dérivabilité de g et la calculer.

Exercice 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n^2}$

1) Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique telle que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $0 \leqslant x < 2\pi$.

2) Donner les développements en série de Fourier de $f(x+1)$ et $f(x-1)$.

3) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n^2}$.

Coefficients de Fourier

Exercice 16. $f(x+\pi)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x)$?

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = -f(x)$?

Exercice 17. *f est-elle π-périodique ?*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique continue. On note c_k les coefficients de Fourier exponentiels de f. Montrer que f est π-périodique si et seulement si c_k est nul pour tout k impair (noter que la série de Fourier de f peut ne pas converger vers f).

Exercice 18. *DSF de f'*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On note a_k, b_k les coefficients de Fourier de f. Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. En déduire que $ka_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $kb_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 19. *DSF de f'*

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la fonction g, 2π-périodique coïncidant avec f sur $[0,2\pi[$. Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de g.

1) Montrer que $a_n = o(1/n)$ et $b_n = \dfrac{f(0)-f(2\pi)}{\pi n} + o(1/n)$.

2) Donner le développement en série de Fourier de g'.

Exercice 20. *DSF d'une primitive de f*

Soit f continue 2π-périodique, $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, a_n, b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de f et $C = \dfrac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(\pi - t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ F(x) = \frac{a_0 x}{2} + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx - b_n\cos nx}{n}.$$

Exercice 21. *Concavité, ENS*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue 2π-périodique paire dont la restriction à $[0,2\pi]$ est concave. Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient : $a_k \leqslant 0$ pour $k \geqslant 1$.

Relation de Parseval

Exercice 22. *ENS MP 2002*

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)=f(1)=0$.

1) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire et 2-périodique.

2) En déduire l'existence de $c>0$ indépendant de f tel que $\|f\|_\infty \leqslant c\|f''\|_2$.

Exercice 23. *Inégalité de Wirtinger*

Soit $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $f(0)=f(2\pi)$.

Montrer que $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 24. *Inégalité isopérimétrique*

1) Soient f,g deux applications 2π-périodiques réelles de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que : $2\int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2$.

2) Soit Γ un arc $\mathcal{C}^1$, fermé, simple, de longueur 2π. Montrer que l'aire du domaine limité par Γ est inférieure ou égale à π.

Exercice 25. $|f''|\leqslant|f|$

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $|f''|\leqslant|f|$.

Exercice 26. *Calcul de $(f\mid g)$*

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de f et g. Montrer que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{c_n(f)}c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 27. *Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier*

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

2) Calculer $\lim_{a\to 0^+}\int_{t=a}^{\pi-a} f(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t$ et en déduire que f n'a pas de développement en série de Fourier (et donc n'est pas continue en 0).

Exercice 28. *X MP* 2001*

Soit $a>0$ et f continue sur $[0,a]$ à valeurs réelles.
On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\int_{t=0}^{a} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

Convergence

Exercice 29. *Phénomène de Gibbs pour* $\sin kx/k$

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}$.

1) Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.

2) Déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Exercice 30. *Convergence uniforme*

Soit $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle $[\alpha, \beta]$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

Exercice 31. *Convergence uniforme*

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour le sens direct : utiliser le critère de convergence uniforme de Cauchy et l'inégalité : $\sin x \geqslant 2x/\pi$ sur $[0, \pi/2]$.

Exercice 32. *Fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0*

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} \sin\Big((2^{p^3} + 1)\dfrac{x}{2}\Big)$.

Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $A_0 = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

Pour $\nu \in \mathbb{N}$, on pose $a_{0,\nu} = \dfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\Big((2\nu + 1)\dfrac{t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$ et $a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \sin\Big((2\nu + 1)\dfrac{t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$. Montrer que si ν est fixé, $s_{n,\nu} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que, pour tout q, pour tout ν, $s_{q,\nu} > 0$, et prouver que $\max_{q\in\mathbb{N}}(s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$.

3) Montrer qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $\nu \geqslant 1$, $s_{\nu,\nu} \geqslant B \ln \nu$.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3}-1}$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} A_k$. Vérifier que $T_n = \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3}-1}$. Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que, pour tout $p \geqslant 1$, $T_{2^{p^3}-1} \geqslant Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

Exercice 33. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{inx}$, *$R$ = fraction rationnelle*

Soit R une fraction rationnelle à coefficients complexes, de degré strictement négatif, n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{Z}$. On pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)e^{inx}$.

1) Étudier l'existence et la continuité de f.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 34. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{P(n)}$, *$P$ = polynôme*

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f 2π-périodique telle que $f(x) = (\pi - x)^2$ sur $]0, 2\pi[$.

2) Soit P un polynôme de degré 2 sans racines dans $\mathbb{N}^*$. On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{P(n)}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exercice 35. *Noyau de Féjer*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n = \dfrac{f_0 + \ldots + f_n}{n + 1}$.

1) Exprimer g_n à l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$.

2) Montrer que la suite (k_n) constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi, \pi[$. Ceci montre que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute f continue.*

Intégrale de Fourier

Exercice 36. *Formule sommatoire de Poisson*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f(x) = O(1/|x|^a)$ et $f'(x) = O(1/|x|^a)$ lorsque $|x| \to \infty$, et on pose $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$.
Montrer que F est bien définie, $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Exercice 37. *Formule d'échange*
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f, f', g, g' sont intégrables. Montrer :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Divers

Exercice 38. $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,\mathrm{d}t$
1) Développer en série de Fourier la fonction : $x \mapsto |\sin x|$.
2) Application : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 39. *Équation différentielle*
Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Exercice 40. *Équation différentielle*
Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + k^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Exercice 41. *Équirépartition modulo 1*
1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ 1-périodique, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\dfrac{f(x) + f(x + \alpha) + \ldots + f(x + n\alpha)}{n + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2) Montrer que le résultat est encore vrai en supposant seulement f continue.
3) En déduire la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$.

Exercice 42. *Cachan MP* 2000*
Soit un réel $\beta > 1$ et $a_k = \iint_{[0,1]^2} e^{-|x-x'|^\beta} e^{2i\pi k(x-x')}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'$. Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell$, k et ℓ étant des entiers relatifs.

Exercice 43. *Algèbre de séries trigonométriques*
Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx}$ où $\sum |c_n|$ converge.
On pose pour $f \in E$: $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$.
1) Justifier la définition de $\|f\|$ et montrer que E est un evn complet.
2) Montrer que E est une $\mathbb{C}$-algèbre et que $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$.
3) Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres.
a) On suppose φ continu, montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que $\forall\, f \in E,\ \varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_0^n$.
b) Vérifier que la formule précédente définit effectivement un morphisme continu de E dans $\mathbb{C}$.

Exercice 44. *Mines MP 2002*
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_{t=0}^{1} \cos(nt^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 45. *Ens Lyon MP* 2003*

On note :

$$\begin{aligned} E &= \{\text{fonctions continues } 2\pi\text{-périodiques } f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\}\ ;\\ E^1 &= \{f\in E \text{ de classe } \mathcal{C}^1\}\ ;\\ E_n &= \{f\in E \text{ tq } \forall\, k\in [\![-n,n]\!],\ \textstyle\int_{t=0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 0\}\ ;\\ E_n^1 &= E_n\cap E^1. \end{aligned}$$

On considère sur E la norme $\|\ \|_2$: $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int |f|^2}$.

1) Montrer que $D : \begin{cases} E_0^1 & \longrightarrow & E_0 \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$ est une bijection.

2) D est-elle continue ?

3) Montrer que D^{-1} est continue.

4) Montrer que $D^{-1}(E_n) = E_n^1$ et calculer $|\!|\!|D^{-1}_{|E_n}|\!|\!|$.

Exercice 46. *Quatre racines, ENS Cachan MP* 2005*

Soit f à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^2$, 2π-périodique, de moyenne nulle. Montrer que $g = f + f''$ s'annule au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$.

solutions

Exercice 1.

1) $a_0 = \pi$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n = 0$.

2) $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{n}$.

3) $a_0 = \dfrac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \dfrac{4}{n^2}$, $b_n = -\dfrac{4\pi}{n}$.

4) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$, $a_{2p} = \dfrac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_p = 0$.

5) $a_{2p} = \dfrac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = 0$.

Exercice 2.

$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_{t=0}^{\pi/2} 2\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{n}\sin(n\pi/2)$.

Donc $I_{2p} = 2(1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1})$, $I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}$.
$b_n = 0$ (parité), $a_{2p} = 0$ (symétrie par rapport à $(\pi/2, 0)$), $a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)\pi} I_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1}$.

Exercice 3.

$2a_k = (a_{k-1} + a_{k+1})\cos\alpha$, $a_0 = a_1\cos\alpha + 2 \Rightarrow a_k = A\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})^k + B\,\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})^k$.
Comme $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ on a $B = 0$ d'où $A = \dfrac{2}{\sin\alpha}$.

Finalement, $f(t) = \dfrac{2}{\sin\alpha}\Big(\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\Big)^k\cos(kt)\Big)$.

Exercice 4.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx = \Re\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n\Big) = \Re\Big(\dfrac{1}{1-ae^{ix}}\Big) = g(x)$.

2) Il y a convergence normale.

3)

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{t=0}^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(nx - nt)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t=0}^{2\pi} a^n\cos(nx - nt)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\cos(nx)\int_{t=0}^{2\pi} a^n\cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t + \sin(nx)\int_{t=0}^{2\pi} a^n\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\pi a^n a_n(f)\cos(nx) + \pi a^n b_n(f)\sin(nx)).
\end{aligned}$$

Il y a convergence normale car $|a| < 1$ et les coefficients de Fourier de f sont bornés. On en déduit que h est continue, puis que les coefficients de Fourier de h sont $a^n a_n(f)$ et $a^n b_n(f)$.

4) Les coefficients de Fourier des deux membres doivent être égaux, ce qui donne : $a_n(f) = \dfrac{1}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ et $b_n(f) = 0$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\pi\lambda a^n \neq 1$ (sinon il n'y a pas de solution), et $a_0(f) = 0$ si $2\pi\lambda \neq 1$, $a_0(f)$ quelconque sinon. Réciproquement, en posant $f(x) = [a_0/2] + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ on définit f, 2π-périodique continue (la série converge normalement), solution de l'équation par égalité des coefficients de Fourier de chaque membre.

Exercice 5.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{2^n} = \dfrac{3}{2(5-4\cos x)}$.

2) $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 6.

2) $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\big(e^a f(e^{ix}) - e^{-ix} f(e^{-ix})\big) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-ka}\cos kx\Big)$.

Exercice 8.

1) $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$.

Exercice 9.

$2\pi c_k = \int_{x=0}^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{x=0}^{2\pi} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ikx}\,\mathrm{d}x$
$= \sqrt{\pi}e^{-k^2/4}$

(calculer $\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ par équation différentielle).

Exercice 10.

1) $a_0 = \dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}$, $a_n = \dfrac{2(-1)^n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = -na_n$.

2) $S = \dfrac{\pi - \operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi}$, $S' = \dfrac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}$.

Exercice 11.

1) Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)}e^{inx} = \dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{2\pi a}-1}{\pi(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx))$.

2) On peut supposer $a > 0$ car $I(-a) = -I(a)$ et $I(0) = 0$. On envisage d'intégrer terme à terme la relation :

$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\sin(au) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu}\sin(au).$$

On coupe l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sur $[0, \pi/a]$ le sinus est positif et le théorème d'intégration terme à terme, cas positif) s'applique. Sur $[\pi/a, +\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme, cas vectoriel) s'applique car $\int_{\pi/a}^{+\infty} |e^{-nu}\sin(au)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\pi/a}^{+\infty} e^{-nu}\,\mathrm{d}u = e^{-n\pi/a}/n$. Ainsi,

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{u=0}^{+\infty} e^{-nu}\sin(au)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}.$$

3) Déjà fait, $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}\sin(au)\,\mathrm{d}u = \dfrac{a}{a^2+1}$. Il doit y avoir une autre méthode pour la question précédente (???)

4) En comparant avec **1)** pour $x = 0$ on obtient : $I(a) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \dfrac{1}{2a}$ pour $a > 0$.

Exercice 12.

1) $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi(a-in)}e^{inx}$.

2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{(e^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \dfrac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{e^{4a\pi}-1}{4a\pi}$ donc $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{a}{a^2+n^2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \dfrac{1}{2a}$.

$\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{a^2+n^2} = \dfrac{1}{2a}\Big(\dfrac{\pi}{\operatorname{th}(a\pi)} - \dfrac{1}{a}\Big) \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{\pi^2}{6}$ et il y a convergence dominée.

3) $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 13.

1) $a_n = -\dfrac{4}{4n^2-1}$, $b_n = -\dfrac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}$.

3) $\dfrac{\pi-2}{4}$.

Exercice 14.

1) $\cos ax = \dfrac{\sin \pi a}{\pi a} + \dfrac{2a\sin \pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}$.

2) $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2t}{t^2-n^2} = \dfrac{\pi\cos\pi t}{\sin\pi t} - \dfrac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \ln\left(\lambda\dfrac{\sin\pi t}{t}\right)$ et $g(0)=0 \Rightarrow g(t) = \ln\left(\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}\right)$.

Exercice 15.

1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

3) Le premier membre vaut $f(1) = \dfrac{\pi-1}{2}$ et le second $\dfrac{1}{4\pi}\int_{t=0}^{2\pi}(f(t+1)-f(t-1))^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi-1}{2}$.

Exercice 16.

1) $a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$.

2) $a_{2p} = b_{2p} = 0$.

Exercice 18.

$a'_k = kb_k$, $b'_k = -ka_k$ + inégalité de Bessel.

Exercice 19.

2) $S'_g(x) = \dfrac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(nb_n - \dfrac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\big)\cos nx - na_n\sin nx$.

Exercice 21.

$$\begin{aligned}
\pi a_k &= \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{2\pi/k} f(t+2i\pi/k)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t=0}^{\pi/2k}\Big(f(t+2i\pi/k) - f((2i+1)\pi/k - t) - f(t+(2i+1)\pi/k) + f((2i+2)\pi/k - t)\Big)\cos(kt)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Exercice 22.

1) Immédiat. La fonction prolongée est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

2) On décompose f : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$ avec $c_n = 2\int_{u=0}^{1} f''(u)\sin(n\pi u)\,\mathrm{d}u$.

On en déduit : $\|f\|_\infty^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4\pi^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right) = \dfrac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2 = \dfrac{\|f''\|_2^2}{45}$.

Autre démonstration sans utiliser les séries de Fourier : pour $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{t=0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = xf'(x) - \int_{t=0}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t \\
f(x) &= \int_{t=1}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)f'(x) - \int_{t=1}^{x}(t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t \\
f(x) &= (1-x)f(x) + xf(x) = \int_{t=0}^{x} t(x-1)f''(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=x}^{1} x(t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{1}\varphi(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t.\ \text{avec } \varphi(x,t) = xt - \min(x,t).
\end{aligned}$$

On en déduit $|f(x)|^2 \leqslant \|f''\|_2^2\int_{t=0}^{1}\varphi(x,t)^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \leqslant \dfrac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Exercice 23.
Parseval pour f et f'. Égalité ssi $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Exercice 24.

1) Développer f, f' et g' en séries de Fourier et appliquer l'inégalité $2|\overline{a}\,b| \leqslant |a|^2 + |b|^2$. Il y a égalité si et seulement si f' et g' sont CL de cos et sin.

2) On paramètre par une abscisse curviligne : $x = f(t)$, $y = g(t) \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi} \dfrac{f'^2 + g'^2}{2} = \pi$.

Exercice 28.
On pose $g(t) = f(a|t|/\pi)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, prolongée par 2π-périodicité. Alors g est paire, continue, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls donc $g = 0$.

Exercice 29.

1) $\frac{\pi}{n+1}$.

2) Somme de Riemman : $\ell = \int_{t=0}^{\pi} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 30.
$\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant \dfrac{\beta - \alpha}{2\pi}$.

Exercice 31.
S'il y a convergence uniforme : $\|a_n \sin nx + \ldots + a_p \sin px\|_\infty \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On prend $x = \dfrac{\pi}{2p}$: $0 \leqslant \dfrac{a_p}{p}(n + \ldots + p) \leqslant \dfrac{1}{p}(na_n + \ldots + pa_p) \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $n = \lfloor p/2 \rfloor \Rightarrow$ cqfd.

Si $na_n \to 0$: Soit $x \in]0, \pi]$ et n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

Transformation d'Abel : $|a_n \sin nx + \ldots + a_p \sin px| \leqslant \dfrac{2a_n}{\sin x/2} \leqslant \dfrac{2na_n}{\pi}$,

et $|a_k \sin kx + \ldots + a_{n-1} \sin(n-1)x| \leqslant (ka_k + \ldots + (n-1)a_{n-1})x \leqslant \dfrac{n-k}{n-1} a_k \leqslant 2a_k$.

Exercice 33.

1) $R(n) = \dfrac{a}{n} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -2$.

Donc $f(x) = R(0) + 2ia \sum_{n=1}^\infty \dfrac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^\infty (S(n)e^{inx} + S(-n)e^{-inx})$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) $R(n) = \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_k}{n^k} + S(n)$ avec $\deg S \leqslant -k-1 \Rightarrow f(x) = R(0) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_k f_k(x) + g(x)$

avec $f_p(x) = \sum_{n=1}^\infty \dfrac{e^{inx} + (-1)^p e^{-inx}}{n^p}$ et g de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $f_p' = if_{p-1}$ et f_1 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ donc f_p aussi.

Exercice 34.

1) $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

2) Soit $P(n) = an^2 + bn + c$. Alors $f(x) - 4ag(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \dfrac{bn + c}{an^4 + bn^3 + cn^2} \cos nx$.

Exercice 35.

1) $k_n(x) = \dfrac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} = \dfrac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.

Exercice 38.

1) $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

Exercice 39.

$|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Exercice 40.

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\dfrac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\dfrac{x\cos kx}{2k^3}$.

Exercice 41.

1) Développer f en série de Fourier.

2) Densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}^0$.

3) $f(t) = \sin^2(\pi t)$, $\alpha = \dfrac{1}{\pi}$, $x = 0$: $S_n = \sin^2 1 + \ldots + \sin^2 n \sim \dfrac{n}{2}$.

Transformation d'Abel : $\sum_{n=1}^{n} \dfrac{\sin^2 n}{n} = -\sin^2 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \dfrac{S_k}{k(k-1)} + \dfrac{S_N}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque : on a un raisonnement plus simple en écrivant $2\sin^2(n) = 1 - \cos(2n)$.

Exercice 42.

Intégration à $x' - x$ constant : $a_k = \int_{y=-1}^{1} e^{-|y|^\beta}(1-|y|)e^{-2ik\pi y}\,\mathrm{d}y$ est le $2k$-ème coefficient de Fourier de la fonction f, 2-périodique, telle que $f(y) = e^{-|y|^\beta}(1-|y|)$ si $-1 \leqslant y \leqslant 1$ donc le k-ème coefficient de Fourier de g, 1-périodique, telle que $g(y) = \frac{1}{2}(f(y) + f(y+1))$. Soit g_n la n-ème somme partielle de la série de Fourier de g, $g_n(y) = \sum_{|k|\leqslant n} a_k e^{2ik\pi y}$.

On a par convergence normale de la série de Fourier de g : $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell = g^2(0) - g_n^2(0)$.

$$\begin{aligned}
g(0) - g_n(0) &= \int_{y=-\frac12}^{\frac12} \frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{y=0}^{\frac12} \frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\sin((2n+1)\pi y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\Big[-\frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\Big]_{y=0}^{\frac12} + 2\int_{y=0}^{\frac12} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(\frac{g(0)-g(y)}{\sin \pi y}\Big)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2} + \int_{y=0}^{\frac12} \text{fct continue}(y)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,\mathrm{d}y \\
&\sim \frac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}.
\end{aligned}$$

$g(0) + g_n(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2g(0) = 1$ d'où $\sum_{|k|>n \text{ ou } |\ell|>n} a_k a_\ell \sim \dfrac{1-e^{-1}}{(2n+1)\pi^2}$.

Exercice 43.

1) Si $f = 0$ alors $c_n = 0$ pour tout n par intégration terme à terme. Donc une fonction $f \in E$ possède un unique développement trigonométrique et $\|f\|$ est bien défini. Alors E est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui est un evn complet.

2) Produit de convolution de deux $\mathbb{Z}$-suites sommables.

3) a) $z_0 = \varphi(x \mapsto e^{2i\pi x})$. On a $|z_0| = 1$ car la suite $(\varphi(x \mapsto e^{2in\pi x})_{n\in\mathbb{Z}})$ est bornée.

Exercice 44.

$u_0 + \ldots + u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2}\int_{t=0}^{1} \dfrac{\cos((n+\frac12)t^2)}{\cos(\frac12 t^2)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{2}\int_{u=0}^{1} \dfrac{\cos((n+\frac12)u)}{2\cos(\frac12 u)\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 45.

1) Si f est $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique alors f' est continue, 2π-périodique de moyenne nulle donc $D(E_0^1) \subset E_0$. Réciproquement, si $g \in E_0$ alors toutes les primitives de g sont 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ et il y en a exactement une qui a une valeur moyenne nulle (une seule possibilité de régler la constante).

2) Non (et ceci quelle que soit la norme) car le spectre de D n'est par borné.

3) $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(f)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |ikc_k(f)|^2 = \|f'\|^2$.

4) Idem, $\|\!|D^{-1}_{|E_n}|\!\| = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 46.

On a $c_0(g) = c_1(g) = c_{-1}(g) = 0$, donc g est orthogonale à tout polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à 1. Si g est de signe constant sur $]0, 2\pi[$, on contredit $c_0(g) = 0$. Donc g a au moins une racine $a \in\,]0, 2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine dans $]0, 2\pi[$ alors g est de signes constants opposés sur $]0, a[$ et $]a, 2\pi[$. Mais alors $g(t)(\cos(t - a/2) - \cos(a/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles, c'est absurde. Donc g a une deuxième racine dans $]0, 2\pi[$, par exemple $b \in\,]a, 2\pi[$. Si g n'a pas d'autre racine sur $]0, 2\pi[$ alors g est de signes constants sur $]0, a[$, $]a, b[$ et $]b, 2\pi[$ et les signes alternent. On obtient une nouvelle contradiction car alors $g(t)(\cos(t - (a + b)/2) - \cos((b - a)/2))$ est de signe constant sur la réunion de ces intervalles. Ainsi g admet une troisième racine, par exemple $c \in\,]b, 2\pi[$. Enfin, si l'on suppose que g n'a pas d'autre racine sur $]0, 2\pi[$ alors on a $g(t) > 0$ sur $]0, a[$ et $]b, c[$ et $g(t) < 0$ sur $]a, b[$ et $]c, 2\pi[$ ou l'inverse. Dans les deux cas, on en déduit que $g(0) = g(2\pi) = 0$.