Suites et séries de fonctions

Exercice 1. *Étude de convergence*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

1) Trouver la limite simple des fonctions f_n.

2) Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 2. *Étude de convergence*

On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) En déduire qu'il en est de même pour la suite (g_n) (on utilisera la concavité de sin sur $[0,\pi]$).

Exercice 3. *Non interversion limite-intégrale*

Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1) Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.

2) Vérifier que $\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. *Non interversion limite-intégrale*

1) Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme (on admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

2) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. *Étude de convergence*

Soit $f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \leqslant n & \longmapsto & (1-x/n)^n \\ x > n & \longmapsto & 0. \end{cases}$

1) Déterminer la limite simple, f, des fonctions f_n.

2) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.

3) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0,a]$.

4) Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6. *Étude de convergence*

Étudier la convergence simple, uniforme, de la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto (1+x/n)^{-n}$.

Exercice 7. *Étude de convergence*

Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha,+\infty[$, pour $\alpha > 0$.

Exercice 8. $f(nx)$, $f(x/n)$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f(x/n)$.

1) Donner un exemple de fonction f.

2) Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3) Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9. *Équation différentielle dépendant d'un paramètre*

Soit y_n la solution de l'équation : $(*_n) \Longleftrightarrow (1+\frac{1}{n})y'' - (2+\frac{1}{n})y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1) Calculer explicitement y_n.

2) Déterminer la limite simple, y, des fonctions y_n.

3) Vérifier que y est solution de l'équation limite de $(*_n)$ avec les mêmes conditions initiales.

Exercice 10. $f \circ f \circ \ldots \circ f$

Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction continue vérifiant : $\forall\, x \neq 0,\ |f(x)| < |x|$.
On pose $f_0(x) = x$, puis $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Étudier la convergence simple des f_n.

Exercice 11. *Étude de convergence*

On pose $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, pour $t \geqslant 0$.

1) Déterminer la limite simple, ℓ, des fonctions f_n.

2) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

3) Démontrer que : $\forall\, t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2 f_{n+1}(t)}$.

4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$ (remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geqslant 1$).

Exercice 12. *Approximation de la racine carrée par la méthode de Newton*

On définit une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ par : $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + x/f_n(x))$, $f_0(x) = x$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n. On pourra considérer $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}$.

Exercice 13. *Approximation polynomiale de la racine carrée*

On considère la suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ définie par les relations : $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n^2(t))$, $f_0 = 0$. Étudier la convergence simple, uniforme, des fonctions f_n.

Exercice 14. *Suite ayant deux limites*

Trouver une suite de polynômes (P_n) convergeant simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$.
Remarque : une telle suite a donc des limites distinctes dans $\mathbb{R}[x]$ pour les normes de la convergence uniforme sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$.

Exercice 15. *Fonction orthogonale à* $\mathbb{R}[X]$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier k on a $\int_{t=a}^{b} f(t) t^k \,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 16. *Approximation de f et f'*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que P_n converge uniformément vers f et P_n' converge uniformément vers f'.

2) Si f est $\mathcal{C}^\infty$, peut-on trouver une suite de polynômes (P_n) telle que pour tout k la suite $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$?

Exercice 17. *Limite de $f_n(x_n)$*

Soient $f_n : D \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant vers une fonction continue f et (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers $x \in D$.

1) Si les fonctions f_n convergent uniformément, montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

2) Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple (avec quand même f_n et f continues).

Exercice 18. *Compositon et convergence*

Soit f_n convergeant uniformément vers f, et g une fonction *uniformément* continue. Démontrer que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformément.

Exercice 19. $f_n \circ g_n$

Soit $f_n : [a,b] \to [c,d]$ et $g_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions f et g. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 20. *Limite simple de polynômes de degrés bornés*

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.

1) Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.

2) Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 21. *Polynômes à coefficients entiers, ENS Lyon MP* 2005*

On considère $f : x \mapsto 2x(1-x)$ définie sur $[0,1]$.

1) Étude de la suite de fonction g_n, avec $g_n = f^n = f \circ \ldots \circ f$.

2) Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et h continue sur $[a,b]$. Montrer que h est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 22. *Théorèmes de Dini*

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur $[a,b]$. convergeant simplement vers une fonction continue f.

1) On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

2) On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 23. *Théorème d'Ascoli*

Soit (f_n) une suite de fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipchitizennes avec le même k.

1) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a,b]$.
On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tq } 0 \leqslant i \leqslant N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ à l'aide de M_n.

2) Montrer que f_n converge uniformément vers f.

Exercice 24. *Équicontinuité*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $D \subset \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que les fonctions f_n sont *équi-continues* c'est à dire :

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 25. *Limite simple de fonctions convexes*

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 26. *Fonction définie par une série*

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\arccos(\cos nx)}{n!}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire et 2π-périodique.

2) Calculer $f(0)$, $f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 27. *Fonction définie par une série (Centrale MP 2003)*

Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2n^2}$ sous réserve de convergence ($a \in \mathbb{R}$).

1) Domaine de définition de f ?

2) Limite de $f(a)$ quand $a \to +\infty$?

3) Limite de $af(a)$ quand $a \to 0$?

Exercice 28. *Fonction ζ de Riemann*

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

2) Prouver que $\zeta(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ (majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ par comparaison à une intégrale).

3) Prouver que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 29. *Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler*

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$.

Montrer que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\zeta(k) - 1}{k}$.

Exercice 30. *Fonction définie par une série*

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.

2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Exercice 31. *Fonction définie par une série*

1) Étudier la convergence de la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

3) Tracer la courbe représentative de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 32. *Fonction définie par une série*

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1) Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

2) Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D.

3) Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.

4) Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.

Exercice 33. *Fonction définie par une série*

1) Établir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\sin x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.

2) Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie de la forme $\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Que pouvez-vous en déduire pour f ?

Exercice 34. *Fonction définie par une série*

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1) Montrer que la série $f(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3) Y a-t-il convergence normale ?

Exercice 35. *Fonction définie par une série*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

1) Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

3) Tracer la courbe de f.

Exercice 36. *Fonction définie par une série*

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\arctan(x+n) - \arctan(n))$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

4) Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 37. *Conversion série-intégrale*

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \dfrac{t^{x-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 38. *Fonction Γ*

Soit $f_n(x) = \dfrac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\dots(1+x/n)}$.

1) Étudier la convergence simple des fonctions f_n.
2) On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(x-1)$ lorsque ces deux quantités existent.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$).

Exercice 39. *Ensi Chimie P' 93*

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t \,\mathrm{d}t$.

Exercice 40. *Convergence de $f^{(n)}$*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 41. *Ensi PC 1999*

Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1) Étudier la convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$.
2) Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \int_{x=0}^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3) En déduire $\sum_{n=0}^\infty u_n$ sous forme d'une intégrale.

Exercice 42. *Développement de* $\coth(x)$

1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.
2) En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^\infty \dfrac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.
3) En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Exercice 43. $\sum \sin(n)/n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, f.
2) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.
3) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 44. *Fonctions ζ et η*

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^x}$ et pour $x > 0$: $\eta(x) = \sum_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1) Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \to 1^+$.
2) Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}$.
3) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercice 45. *Centrale MP 2000*

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(y) = \dfrac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(y)x^n$.
2) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$ et $F(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)x^n$. Montrer que F, $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ existent en tout point de D.

Exercice 46. *Série lacunaire*

Soit (p_n) une suite d'entiers naturels, strictement croissante et telle que $p_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^\infty x^{p_n}$. Montrer que $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

Exercice 47. *Fonctions réciproques (Pugin, MP*-2001)*

Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to [c,d]$ continues, bijectives, strictement croissantes, convergeant simplement vers une fonction $f : [a,b] \to [c,d]$ elle aussi continue, bijective strictement croissante.

1) Montrer qu'il y a convergence uniforme (2ème thm de Dini, considérer une subdivision de $[a,b]$).
2) Montrer que les fonctions réciproques f_n^{-1} convergent simplement vers une fonction g et que $g = f^{-1}$.
3) Montrer que (f_n^{-1}) converge uniformément vers f^{-1}.

Exercice 48. *Mines MP 2001*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le compact K, à valeurs réelles et convergent uniformément sur K vers la fonction f. A-t-on $\sup f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup f$?

Exercice 49. *Mines MP 2001*

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1) Étudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3) Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
4) Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 50. *Centrale MP 2001*

Convergence et limite en 1^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

Exercice 51. *Centrale MP 2001*

Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{1-t^n}$.

1) Pour quelles valeurs de t, S est-elle définie ? Est-elle continue ?
2) Montrer qu'au voisinage de 1^- on a $S(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t} + O\Big(\dfrac{1}{1-t}\Big)$. On pourra développer $\ln(1-t)$ en série entière.

Exercice 52. *Centrale MP 2002*

On pose $\varphi(x) = d(x,\mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \text{ tq } n \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$ est définie et continue.
2) Montrer que φ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?
3) Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 53. *ENS Lyon-Cachan MP 2002*

Soin $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\sin^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h \neq 0$ et $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Exercice 54. *Centrale MP 2002*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \dfrac{1}{n} \int_{t=0}^{n} f(x+t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la suite (F_n) converge vers une fonction F que l'on précisera.
2) Nature de la convergence ?
3) Prouver $\|F\|_\infty = |F(0)|$.

Exercice 55. *Approximation par des fractions rationnelles*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, ayant même limite finie ℓ en $\pm\infty$. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles.

Exercice 56. *Fonction définie par une série*

On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1) Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
2) Chercher un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 57. *Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006*

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ et $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 58. *Étude de $\sum t^{p-1}\sin(px)$ pour $x \in]0,\pi[$, TPE MP 2005*

1) Calculer $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(px)$ puis $S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$.

2) Calculer $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{t=0}^{1} S(t)\,\mathrm{d}t$.

3) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ converge et donner sa valeur.

Exercice 59. *Fraction rationnelle de meilleure approximation (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)*

On note R l'ensemble des fractions rationnelles continues sur $[0,1]$ et pour $m,n \in \mathbb{N}$:
$R_{m,n} = \{f \in R \text{ tq } \exists\, P,Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \deg(P) \leqslant m,\ \deg(Q) \leqslant n \text{ et } f = P/Q\}$.

1) R est-il un ev ? Si oui en trouver une base. Même question pour $R_{m,n}$.

2) Soient m,n fixés. On note $d = \inf\{\|g-f\|,\ f \in R_{m,n}\}$ où g désigne une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\|h\| = \sup\{|h(x)|,\ x \in [0,1]\}$. Montrer qu'il existe $r_0 \in R_{m,n}$ tel que $\|g - r_0\| = d$.

Exercice 60. *Dérivation multiple, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005*

1) Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que (f_n') converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f' = g$.

2) Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ telle que $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers g et il existe $x_1,\dots,x_p$ distincts tels que $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que $f^{(p)} = g$.

Exercice 61. *Exponentielle, Polytechnique MP* 2006*

Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exp(A) - \exp(B) = \int_{s=0}^{1} \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\,\mathrm{d}s$.

Exercice 62. *Fonction définie par une série, CCP 2015*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que S est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 63. *$f(2x) = 2f(x) - 2f^2(x)$, Centrale 2014*

On étudie l'équation fonctionnelle (E) : $f(2x) = 2f(x) - 2f^2(x)$.

1) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

2) Pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xh(x)$. A quelle condition sur h, f est-elle solution de (E) ?

3) On définit les fonctions h_n par $h_0(x) = 1$ et $h_{n+1}(x) = h_n(x/2) - (x/2)h_n^2(x/2)$.
Pour $x,y \in [0,1]$ on pose $T_x(y) = y - xy^2/2$.

a) Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$ et $T_x([0,1]) \subset [0,1]$.

b) Montrer que la suite (h_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

c) Montrer que (E) admet une solution continue non constante sur $[0,1]$.

d) Montrer que (E) admet une solution continue non constante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 64. *Noyau de Dirichlet, X 2014*

1) Calculer $D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ et $\tilde{D}_n(x) = D_n(x) - \frac{1}{2}\sin(nx)$, puis montrer que $\tilde{D}_n(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,\pi]$.

2) Montrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que $\forall\, n \geqslant 2$, $c_1\ln(n) \leqslant \int_{x=0}^{\pi} \tilde{D}_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant c_2\ln(n)$.

3) Soit (b_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge. Montrer l'équivalence entre :

(i) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k D_k(x)$ est intégrable sur $[0,\pi]$.

(ii) $\tilde{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{D}_k(x)$ est intégrable sur $[0,\pi]$.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ln(k)$ converge.

Exercice 65. *Développement en série de* cotan, *Centrale MP 2011*

Soit $f : x \mapsto \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{k+x}\right)$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ...

a) $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x+1) = f(x)$.

c) $f(2x) = \frac{1}{2}(f(x+\frac{1}{2}) + f(x))$.

3) Montrer que $x \mapsto f(x) - \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ entier.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$.

solutions

Exercice 1.
2) $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n+1}) \sim en^{\alpha-1}$.

Exercice 4.
2) Intégrale constante $= 1$.

Exercice 5.
1) e^{-x}.

Exercice 6.
CVU sur tout compact par encadrement du logarithme.

Exercice 9.
1) $y_n = (n+1)(e^x - e^{nx/(n+1)})$.
2) $y = xe^x$.

Exercice 10.
$(|f_n(x)|)$ décroît donc tend vers L. On extrait une sous suite $(f_{\varphi(n)})$ convergeant vers $\ell \Rightarrow |\ell| = L$.
La sous suite $(f_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(\ell) \Rightarrow |f(\ell)| = L \Rightarrow L = 0$.

Exercice 11.
1) $\ell(t) = \dfrac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ et $\ell(0) = 0$.
3) Accroissements finis.

Exercice 13.
$f_n(t) \to \sqrt{t}$ par valeurs croisantes, il y a convergence uniforme.

Exercice 14.
Prolonger en une fonction continue sur $[0,3]$ et utiliser Stone-Weierstrass.

Exercice 19.
$|g_n(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant |g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - g(f(x))|$ et g est uniformément continue.

Exercice 20.
1) Polynôme de Lagrange.

Exercice 21.
1) Il y a convergence simple vers la fonction nulle en 0 et 1 et égale à 1/2 ailleurs. La convergence est uniforme sur tout $[a,b] \subset]0,1[$.
2) La question précédente donne le résultat pour 1/2, il suffit alors d'utiliser le théorème de Weierstrass et les nombres dyadiques.

Exercice 25.
Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer f_n par les cordes associées.

Exercice 26.
2) $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi \operatorname{sh} 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(e - \cos 1)$.

Exercice 27.
1) $\mathbb{R}^*$.
2) TCM : $f(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3) CSI : $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a} = \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant f(a) \leqslant \int_{x=0}^{\infty} e^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x + 1 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a} + 1$. Donc $af(a) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 30.
2) $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

Exercice 32.

2) $xg(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$.

3) CSA $\Rightarrow g' < 0$. $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4) $g(x) \sim 1/x$ en 0^+ et $g(x) \sim 1/(ex)$ en $+\infty$.

Exercice 34.

2) CSA $\Rightarrow |R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \ln\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)$.

3) Non, $\|u_n\|_\infty = \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big)$.

Exercice 35.

2) $f(x+1) = xf(x) - 1$.

Exercice 36.

1) CVU sur tout $[a,b]$.

3) $f(x+1) = f(x) + \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

4) $f(x+1) - f(x) \sim 1/x$ donc la suite $(f(n))$ diverge et f est croissante $\Rightarrow \lim = +\infty$.

Exercice 37.

$\dfrac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

Exercice 38.

1) $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \dfrac{x(x+1)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \ln f_n(x)$ est convergente pour tout $x \notin -\mathbb{N}^*$.

3) $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x}{k(k+x)}$.

Exercice 39.

Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x) = 1 - \int_{u=0}^{1}(1-u)^{n+1} x\sin(xu)\,\mathrm{d}u$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.

Exercice 41.

1) cva si $|\cos x| < 1$, scv si $\cos x = 1$, dv si $\cos x = -1$.

2) TCM en regroupant les termes deux par deux.

3) $\int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 42.

1) $F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{e^{2ik\pi/n}}{X + n(1 - e^{2ik\pi/n})}$.

2) $F_n(2x) - F_n(-2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2 - n^2(1-e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2}$.

Supposons n impair, et regroupons les termes conjugués obtenus pour k et $n-k$:

$F_n(2x) - F_n(-2x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \underbrace{\left(\dfrac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2} + \dfrac{x}{x^2e^{2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2}\right)}_{=u(k,n,x)}$.

On transforme la somme en série de $k = 1$ à $k = \infty$ en posant $u(k,n,x) = 0$ si $k > (n-1)/2$, puis on passe à la limite, sous réserve de justification, dans cette série pour $n \to \infty$, ce qui donne la formule demandée.

Justification de l'interversion limite-série :
en utilisant $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ on a $|u(k,n,x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{4k^2 - x^2}$ pour tout $k \geqslant |x/2|$, donc il y a convergence normale par rapport à n, à x fixé.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{x^2 + k^2\pi^2} = \dfrac{\coth(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite pour $x \to 0$.

Exercice 43.

1) Transformation d'Abel.

2) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

3) $\dfrac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 44.

2) $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}\right)$.

A n fixé, $\dfrac{1}{n^x} - \int_{t=n}^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^x} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ et la convergence est monotone donc

$\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1}\dfrac{dt}{t}\right) = \gamma$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n} = \eta'(1) = \gamma\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(2)^2$.

Exercice 46.

Pour k fixé et $x \in [0,1[$ on a $0 \leqslant f(x) \leq \text{polynôme}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn} = \text{polynôme}(x) + \dfrac{1}{1-x^k}$ et $\dfrac{1}{1-x^k} \sim \dfrac{1}{k(1-x)}$ au voisinage de 1 donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{k(1-x)}$ pour x suffisament proche de 1.

Exercice 47.

2) soit $y \in [c,d]$ et $x_n = f_n^{-1}(y)$. La suite (x_n) admet au plus une valeur d'adhérence, $x = f^{-1}(y)$.

Exercice 48.

Oui : $|\sup f_n - \sup f| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.

Exercice 49.

1) Il y a convergence normale sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Il n'y a pas convergence normale au voisinage de 0 car $\sup\left\{\dfrac{xe^{-nx}}{\ln n},\ x \geqslant 0\right\} = \dfrac{1}{en\ln n}$ atteint pour $x = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge (série de Bertrand). Par contre il y a convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ car

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{\infty} xe^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{\ln n(1-e^{-x})} \leqslant \frac{\sup\{t/(1-e^{-t}),\ t \geqslant 0\}}{\ln n}.$$

3) $\dfrac{S(x) - S(0)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{\ln n} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n} = +\infty$ par convergence monotone.

Exercice 50.

Comparaison série-intégrale, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 51.

1) $-1 < t < 1$.

2) Pour $0 \leqslant t < 1$ et $n \geqslant 2$ on a :

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{t^n}{1-t^n} &= \frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{t^n((1-t)+(1-t^2)+\ldots+(1-t^{n-1}))}{n(1+t+\ldots+t^{n-1})}\\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{(t^n-t^{n+1})((n-1)+(n-2)t+\ldots+t^{n-2})}{n(1+t+\ldots+t^{n-1})}\end{aligned}$$

d'où $0 \leqslant (1-t)\dfrac{t^n}{1-t^n} - \dfrac{t^n}{n} \leqslant \dfrac{n-1}{n}(t^n - t^{n+1}) \leqslant t^n - t^{n+1}$ (vrai aussi si $n = 1$) et en sommant :

$$0 \leqslant (1-t)S(t) + \ln(1-t) \leqslant 1.$$

Exercice 52.

1) La série converge normalement et φ est continue.

2) φ est 1-lipschitzienne, mais on ne peut rien en déduire pour f :
pour N fixé et $0 < h \leqslant \dfrac{1}{2.4^n}$, on a $|f(h) - f(0)| = f(h) \geqslant \sum_{n=1}^{n} 3^n h = \dfrac{3^{N+1}-3}{2} h$ donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.

3) D'après ce qui précède, le taux d'accroissement de f en 0 est arbitrairement grand, donc f n'est pas dérivable en 0. On montre de même que f n'est pas dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 53.

On suppose h réel. La série converge localement normalement sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Continuité en 0 : on pose $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\varphi(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon infini). Pour $h \neq 0$ on a :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{t=(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 54.

1) Soit $k = \lfloor n/2\pi \rfloor$.
On a $F_n(x) = \dfrac{2k\pi}{n}\int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{n}\int_{t=2k\pi}^{n} f(x+t)f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{t=0}^{2\pi} f(x+t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) uniforme.

3) Cauchy-Schwarz.

Exercice 55.

$g = x \mapsto f(\tan(x/2))$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Exercice 56.

1) CSA : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2)

$$\begin{aligned}
xf(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2+x^2}}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{t=2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On a $\int_{u=0}^{\infty} \dfrac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = 1 = a+b$ avec :

$a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p)/x}^{(2p+1)/x} \dfrac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ et $b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \dfrac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = xf(x)$.

$h : u \mapsto \dfrac{u}{(u^2+1)^{3/2}}$ est croissante sur $\left[0, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}}, +\infty\right[$ donc $|a-b| \leqslant \dfrac{3\|h\|_\infty}{x}$, et $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Exercice 57.

On a $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} \leqslant xS_1(x) \leqslant \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{1}{t} + O(t)$ donc $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$. On en déduit $S_1(x) \sim -\dfrac{\ln x}{x}$.

La même méthode ne marche pas pour S_2 car le terme résiduel, $\dfrac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ n'est pas négligeable devant $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^2(t)}$. Par contre, on peut remarquer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, d'où $S_2(x) \sim \dfrac{\zeta(2)}{x^2}$.

Exercice 58.

1) $S_n(t) = \Im\left(\dfrac{e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Im\left(\dfrac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \dfrac{\sin x}{1-2t\cos x + t^2}$ pour $-1 < t < 1$.

2) $\int_{t=0}^{1} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{\sin(px)}{p}$.

$\int_{t=0}^{1} S(t)\,\mathrm{d}t = (t - \cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan x/2} \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \dfrac{\pi - x}{2}$.

3) TCD : $|S_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{\sin x}$ intégrable par rapport à t sur $[0,1]$. On en déduit $\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{\sin(px)}{p} = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Exercice 59.

1) R est trivialement un $\mathbb{R}$-ev. Le théorème de décomposition en éléments simples donne une base de R en se limitant aux éléments simples n'ayant pas de pôle dans $[0,1]$.

$R_{m,n}$ n'est pas un ev. Par exemple $\dfrac{1}{X+1}$ et $\dfrac{1}{X+2}$ appartiennent à $R_{0,1}$ mais pas leur somme.

2) Soit (f_k) une suite d'éléments de $R_{m,n}$ telle que $\|g-f_k\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} d$. On note $f_k = P_k/Q_k$ avec $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$, $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\|Q_k\| = 1$. On a $\|P_k\| \leqslant \|g - f_k\| + \|g\|$ donc les suites (P_k) et (Q_k) sont bornées dans $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Quitte à prendre une sous-suite, on se ramène au cas $P_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} P \in \mathbb{R}_m[X]$ et $Q_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Q \in \mathbb{R}_n[X]$ avec de plus $\|Q\| = 1$.

Si Q n'a pas de racine dans $[0,1]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|Q(x)| \geqslant \alpha$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $|Q_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}\alpha$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout k assez grand. On en déduit que la suite (P_k/Q_k) converge uniformément vers P/Q sur $[0,1]$ et que $r_0 = P/Q$ convient.

Si Q admet dans $[0,1]$ des racines $a_1,\dots,a_p$ de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, on note $Q^0 = \prod_i (X - a_i)^{\alpha_i}$ et $Q^1 = Q/Q^0$. Soit $M = \max\{\|g - f_k\|,\ k \in \mathbb{N}\}$. Pour tous $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $|g(x)Q_k(x) - P_k(x)| \leqslant M|Q_k(x)|$ donc à la limite, $|g(x)Q(x) - P(x)| \leqslant M|Q(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci implique que Q^0 divise P, on note $P^1 = P/Q^0$. Alors pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $|g(x)Q^0(x) - P_k(x)Q^0(x)/Q_k(x)| \leqslant \|g - f_k\||Q^0(x)|$, d'où $|g(x)Q^0(x) - P^1(x)Q^0(x)/Q^1(x)| \leqslant d|Q^0(x)|$ et finalement $r_0 = P^1/Q^1$ convient.

Exercice 60.

2) Soit P_n le polynôme de Lagrange défini par $P_n(x_i) = f_n(x_i)$ et $\deg P_n < p$. Les coordonnées de P_n dans la base de Lagrange forment des suites convergentes donc la suite (P_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$. Quant à la suite $(P_n^{(p)})$, c'est la suite nulle. Donc on peut remplacer f_n par $f_n - P_n$ dans l'énoncé, ce qui revient à supposer que $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i. Soit f la fonction définie par $f(x_i) = 0$ et $f^{(p)} = g$: f existe (prendre une primitive p-ème arbitraire de g et lui soustraire un polynôme de Lagrange approprié) et est unique (la différence entre deux solutions est polynomiale de degré $< p$ et s'annule en p points distincts). On remplace maintenant f_n par $f_n - f$, et on est rammené à montrer que : si $f_n(x_i) = 0$ pour tous n et i et si $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers la fonction nulle, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Ceci résulte du lemme suivant :

Il existe une fonction φ_p bornée sur $[a,b]^2$, indépendante de n, telle que $f_n(x) = \int_{t=a}^{b} \varphi_p(x,t) f_n^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor-intégrale pour f_n entre x et y :

$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f_n'(x) + \ldots + \frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) + \int_{t=x}^{y} \frac{(y-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale peut être étendue à l'intervalle $[a,b]$ sous la forme $\int_{t=a}^{b} u_p(x,y,t) f_n^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t$ en posant

$$u_p(x,y,t) = \begin{cases} (y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } x < t < y\ ; \\ -(y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } y < t < x\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant successivement $y = x_1, \ldots, y = x_n$, on obtient un système linéaire en $f_n(x), \ldots, f_n^{(p-1)}(x)$ de la forme :

$$\begin{cases} f_n(x) + (x_1 - x)f_n'(x) + \ldots + \dfrac{(x_1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) & = & -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_1,t) f_n^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots & & \\ f_n(x) + (x_p - x)f_n'(x) + \ldots + \dfrac{(x_p-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) & = & -\int_{t=a}^{b} u_p(x,x_p,t) f_n^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

La matrice M de ce système est la matrice de Vandermonde de $x_1 - x, \ldots, x_p - x$, inversible. On en déduit, avec les formules de Cramer, une expression de $f_n(x)$ à l'aide des intégrales du second membre, de la forme voulue. Le facteur φ_p est borné car le dénominateur est $\det(M) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$, indépendant de x.

Exercice 61.

Développer en séries sous l'intégrale, multiplier, permuter avec l'intégrale puis simplifier.

Exercice 62.

1) A x fixé, $f_n(x) = o(1/n^{2,5})$.

2) $|f_n'(x)| = \dfrac{2|x|}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Il y a convergence normale de $\sum f_n'$ donc on peut dériver terme à terme.

3) $f_n'(x) = \dfrac{1}{n^2} g(nx)$ avec $g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ donc $f_n''(x) = \dfrac{1}{n} g'(nx)$. Par étude de fonction, g' est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ d'où $|f_n''(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}|g'(na)| = O(1/n^3)$ pour $x \geqslant a > 0$.

Exercice 63.

1) La fonction nulle.

2) $h(2x) = h(x) - xh^2(x)$ pour $x \neq 0$.

3) **a)** $0 \leqslant T_x'(y) = 1 - xy \leqslant 1$.

b) $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = |T_x(h_n(x/2)) - T_x(h_{n-1}(x/2))| \leqslant |h_n(x/2) - h_{n-1}(x/2)|$ et par récurrence $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant |h_1(x/2^n) - h_0(x/2^n)| \leqslant 1/2^{n+1}$: la série télescopique est normalement convergente.

c) Soit $h = \lim(h_n)$. C'est une fonction continue non nulle car $h(0) = 1$, et qui vérifie **2)**. La fonction $f = x \mapsto xh(x)$ est solution de (E) sur $[0,1]$, continue non identiquement nulle et donc non constante.

d) On note f_0 la fonction précédente et on pose pour $x \in [0,1]$: $f_1(2x) = 2f_0(x) - 2f_0^2(x)$, ce qui définit f_1 sur $[0,2]$, continue, coïncidant avec f_0 sur $[0,1]$ et solution de (E) sur $[0,2]$. On définit de même f_2 sur $[0,4]$ à partir de f_1, etc et on pose enfin pour $x \geqslant 0$ $f(x) = f_n(x)$ où n est choisi tel que $x \leqslant 2^n$. Le résultat ne dépend pas de n et f convient. On peut encore prolonger f à $\mathbb{R}$ par parité pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$ continue et non constante.

Exercice 64.

1) $D_n(x) = \dfrac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$, $\tilde{D}_n(x) = \dfrac{\cos(x/2)(1-\cos(nx))}{2\sin(x/2)}$.

2) $\int_{x=0}^{\pi} \tilde{D}_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{2k+1<n} 1/k + (0 \text{ ou } 1)/n$ et on compare la série à $\int \mathrm{d}t/t$.

3) (i)$\Leftrightarrow$(ii) par convergence normale de $\sum b_k \sin(kx)$.
(ii)$\Leftrightarrow$(iii) par intégration terme à terme, cas réel positif.

Exercice 65.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$.

2) **c)** La formule ne marche que si $2x$ n'est pas entier.

3) $f(x) - 1/x$ et $\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x) - 1/x$ se prolongent par continuité en 0 (avec des limites nulles), donc la différence aussi. Par 1-périodicité, cette différence se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ entier.

4) Soit $g(x) = f(x) - \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $g(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{Z}$: g est continue, vérifie la relation fonctionnelle $g(2x) = \frac{1}{2}(g(x+\frac{1}{2}) + g(x))$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, et donc aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$ par continuité. On en déduit $g(x) = 0$ pour $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, puis pour tout $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ et enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$ par densité.