Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1. *Vrai ou faux ?*

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

1) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3) Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4) Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5) Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\dfrac{f(x)}{x^p} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2. *Calculs de rayons*

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$.
2) (a_n) est périodique non nulle.
3) $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
4) $a_n = n^n/n!$.
5) $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.
6) $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7) $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8) $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
9) $a_n = \dfrac{1.4.7\dots(3n-2)}{n!}$.
10) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, a_0 = a_1 = 1$.
13) $a_n = \binom{kn}{n}$.
14) $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
15) $a_n = \int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, \mathrm{d}t$.
16) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17) $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 3. *Centrale P' 1996*

Comment peut-on trouver le rayon de convergence d'une série entière dont la suite des coefficients admet une infinité de zéros ?

Exercice 4. *Mines MP 2003*

Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k(\frac{2k\pi}{5} + \alpha)x^k$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?

Exercice 5. *Ensi MP 2003*

Rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ et étude pour $x = \pm R$.

Exercice 6. *Centrale MP 2003*

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}$, $b_n = \sin(a_n)$.

1) Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.
2) Déterminer la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x.

Exercice 7. *Transformation de rayons*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1) $\sum a_n^2 z^n$.
2) $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$.
3) $\sum \dfrac{n!\, a_n}{n^n} z^n$.

Exercice 8. *Séries paire et impaire*

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence R et R'. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 9. *Coefficients inverses*

Trouver deux suites (a_n) et (b_n) de complexes non nuls tels que $a_n b_n = 1$ pour tout n, mais $R_a R_b \neq 1$ où R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Exercice 10. *Division par $z - \rho$*

Soit $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et $\rho > 0$. On définit la série entière $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de sorte que $(z-\rho)b(z) = a(z)$ en cas de convergence de $b(z)$.

1) Prouver l'existence et l'unicité des coefficients b_n.

2) Quel est le rayon de convergence de $b(z)$?

Exercice 11. *Développer peut être dangereux*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\dfrac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1) Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

2) On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2.4^n} a_k x^k$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} a_k x^k$ est égal à 1 (en convenant que les a_k non définis valent zéro).

Développement, sommation

Exercice 12. *Développements en série entière*

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) $\ln(1+x+x^2)$.

2) $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.

3) $x\ln(x+\sqrt{x^2+1}\,)$.

4) $\dfrac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

5) $\dfrac{1}{1+x-2x^3}$.

6) $\dfrac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.

7) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

8) $\arctan(x+1)$.

9) $\arctan(x+\sqrt{3}\,)$.

10) $\int_{t=0}^{x} \dfrac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,\mathrm{d}t$.

11) $\left(\dfrac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$.

12) $\int_{t=x}^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

13) $e^{-2x^2}\int_{t=0}^{x} e^{2t^2}\,\mathrm{d}t$.

14) $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

15) $\sin(\frac{1}{3}\arcsin x)$.

Exercice 13. *Ensi PC 1999*

Développer en série entière : $\ln(\sqrt{1-2x\operatorname{ch} a + x^2})$.

Exercice 14. $e^{x^2}/(1-x)$

Développer en série entière $\dfrac{e^x}{1-x}$ puis $\dfrac{e^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 15. *Mines-Ponts MP 2004*

Développer en série entière $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 16. *DSE d'une fraction rationnelle par récurrence linéaire*

Développer $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 17. *Produit de polynômes*

Quel est le coefficient de x^n dans $\Big(1+x+\ldots+x^n\Big)\Big(1+2x+\ldots+(n+1)x^n\Big)\Big(1+4x+\ldots+(n+1)^2x^n\Big)$?

Exercice 18. *Développement en série entière de $\zeta(1+x)-1/x$*

1) Vérifier que pour $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a : $\zeta(1+x) - \dfrac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{1+x}} - \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}\Big)\right)$.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $\gamma_p = \lim_{k\to\infty}\left(\dfrac{\ln^p(1)}{1} + \ldots + \dfrac{\ln^p(k)}{k} - \dfrac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\right)$. Justifier l'existence de γ_p et montrer que $|\gamma_p| \leqslant (p/e)^p$.

3) Montrer alors que pour $x \in \left]0,1\right[$ on a : $\zeta(1+x) - \dfrac{1}{x} = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

Exercice 19. *Sommation de séries entières*

Calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n-1}$. **2)** $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$. **3)** $\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)(n+3)}$. **5)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{4n^2-1}$. **6)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{4n-1}$, $x\geqslant 0$.

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+3}{2n+1}x^n$. **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}\operatorname{ch}(na)$. **9)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n+1}x^n$. **11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n)!}$. **12)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^{2n}$.

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^5x^n}{n!}$. **14)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$. **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n+1}x^n$.

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\int_{t=1}^{x}\ln^n t\,\mathrm{d}t$. **17)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

Exercice 20. *Suite récurente linéaire*

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0=1$, $v_0=0$, $u_{n+1}=u_n+2v_n$, $v_{n+1}=u_n+v_n$.
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$.

Exercice 21. *Série matricielle, Centrale MP 2000*

1) Montrer l'existence de $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}kz^k$ pour $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$.

2) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty}kA^k$ converge si et seulement si les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

3) La somme $S=\sum_{k=1}^{\infty}kA^k$ est-elle inversible ?

Exercice 22. *Série des traces (Centrale MP 2003)*

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.

2) On pose $t_n=\operatorname{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de t_{n-1},t_{n-2},t_{n-3}.

3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}t_nz^n$ et calculer sa somme.

Exercice 23. *Centrale MP 2000*

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 24. $\sum P(n)x^n$*, Ensi P 91*

Rayon et somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p.

Exercice 25. $\sum e^{in\theta}/2^n$*, Ensi P 91*

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\theta}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n2^n}$.

Exercice 26. *Ensae MP* 2000*

Soit (u_n) définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{u_{n-k}}{k!}=1$. Trouver la limite de (u_n).

Exercice 27. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$

Soit $q\in\,]-1,1[$ et $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nx)$.

1) Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$ et que f est développable en série entière au voisinage de 0. On admettra que si une fonction g est DSE alors e^g l'est.

2) A l'aide de la relation : $f(x)=(1-qx)f(qx)$, calculer les coefficients du développement de f et le rayon de convergence.

Exercice 28. *Fonction non DSE*

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n+n^2ix}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de 0.

Exercice 29. *Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003*

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{inx}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 30. *Thm de réalisation de Borel*

Soit (a_n) une suite complexe donnée, on construit dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout entier n on ait $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant : $\forall\, x \in [-1, 1]$, $\varphi(x) = 1$ et $\forall\, x \notin [-2, 2]$, $\varphi(x) = 0$ (l'existence de φ fait l'objet de la question **2**). On pose $\varphi_n(x) = x^n\varphi(x)$, $M_n = \max(\|\varphi_n'\|_\infty, \dots, \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$ où (λ_n) est une suite de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$ et telle que $\sum |a_n| M_n/\lambda_n$ converge.

1) Montrer que f est bien définie, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.

2) Construction de φ : à l'aide de fonctions du type $x \mapsto \exp(-1/x)$ construire une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ nulle sur $[0, 1] \cup [2, +\infty[$ et strictement positive sur $]1, 2[$.

Vérifier alors que $\varphi(x) = \int_{t=|x|}^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_{t=0}^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ convient.

Étude au bord

Exercice 31. *Étude sur le cercle de convergence*

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1) Déterminer le rayon de convergence, R, de cette série.

2) Étudier la convergence de f pour $x = \pm R$.

3) Déterminer $\lim_{x \to R^-} f(x)$.

Exercice 32. *Coefficients équivalents $\Rightarrow$ séries équivalentes*

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$.

1) Montrer que $A(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \to 1^-$.

Exercice 33. *Produit de Cauchy*

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers A,B,C, alors $C = AB$ (considérer les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$).

Exercice 34. *Produit de Cauchy*

Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). On suppose que la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$ et que $b_n/b_{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$ avec $|\lambda| < R$. Montrer que $c_n/b_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} A(\lambda)$.

Exercice 35. *CCP 2015*

On considère la série de fonctions $\sum (-1)^n \ln(n) x^n$.

1) Donner le rayon de convergence de cette série entière.

2) On note S sa somme. Montrer que, pour tout $x \in\,]-1, 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln(1 + \frac{1}{n}) x^{n+1}.$$

3) En déduire que S a une limite en 1^- et la calculer.

Équations différentielles

Exercice 36. *Équation différentielle*

Montrer que l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de 0. Calculer $y(1)$ à 5.10^{-5} près.

Exercice 37. *DSE de tan*

1) En utilisant la relation : $\tan' = 1+\tan^2$, exprimer $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan,\dots,\tan^{(n-1)}$. En déduire que : $\forall\, x \in [0,\pi/2[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

2) Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

3) Soit f la somme de la série précédente. Montrer que $f' = 1+f^2$ et en déduire que $f = \tan$.

4) Prouver que le rayon de convergence est exactement $\pi/2$.

Exercice 38. $1/\cos x$*, Centrale 2014*

Soit $\varphi(x) = \dfrac{1}{\cos x}$: on suppose que φ admet un développement en série entière, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$ valide pour tout $x \in\,]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $E_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k}E_k$.

2) On suppose que, pour tout $x \in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. En utilisant la relation $\tan' = 1+\tan^2$ montrer que, pour tout n, $F_n > 0$.

3) En utilisant $\varphi'(x)$ montrer que, pour tout n, $E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}E_kF_{n-k}$.

Exercice 39. *DSE de* $(arcsinx)^2$

On pose $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.

2) Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.

3) Donner le développement en série entière de $\arcsin^2 x$.

Exercice 40. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1) Déterminer le rayon de convergence et montrer que f vérifie l'équation : $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.

2) Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ (utiliser le DL de f en 0 à l'ordre 1 pour fixer la constante) et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 41. *Calcul de somme*

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\,x^{2n+1}}{1.3.5\dots(2n+1)}$.

1) Déterminer le rayon de convergence.

2) Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

3) Calculer $f(x)$.

Exercice 42. *Fonction génératrice du nombre de partitions*

On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

1) Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k$.

2) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{T_nx^n}{n!} = e^{e^x-1}$.

Exercice 43. *Dérangements, Mines 2015*

E est un ensemble de cardinal n, S_n le nombre de permutations de E sans point fixe.

1) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$.

2) On pose $f : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{S_n}{n!} x^n \end{cases}$.

a) Montrer que f est bien définie.

b) Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

c) En déduire que $S_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

d) Montrer enfin que $S_n = E(\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2})$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 44. *Suite récurrente*

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

1) Montrer que le rayon de convergence est non nul.

2) Calculer $f(x)$.

3) En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 45. *Fonction ζ*

Pour $|x| < 1$ on pose : $Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^n$.

Montrer que Z vérifie l'équation différentielle : $2xZ'(x) - 2Z^2(x) + Z(x) = 3x\zeta(2)$ (écrire $Z(x)$ comme somme d'une série double, intervertir les sommations, remplacer et ... simplifier).

En déduire la relation de récurrence : $\forall\, n \geqslant 2,\ (n + \frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Exercice 46. *DSE de tan*

On note $\zeta_i(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^n}$ et $Z_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_i(2n) x^n$. En s'inspirant de l'exercice **45** montrer que Z_i vérifie l'équation différentielle : $2xZ_i'(x) - 2Z_i^2(x) - Z_i(x) = x\zeta_i(2)$.

Déterminer alors deux réels α et β tels que $T(x) = Z_i(x^2)/x$ soit égal à $\alpha \tan \beta x$ sur $]-1,1[$.

Exercice 47. *DSE de* $\tan x$.

1) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} \pi)$, vérifier l'identité : $\dfrac{(1+ia) - e^{ib}(1-ia)}{1-e^{ib}} = 1 - \dfrac{a}{\tan(b/2)}$.

2) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité : $a^n + b^n = \prod_{k=0}^{n-1} (a - be^{i(2k+1)\pi/n})$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'identité : $\dfrac{\left(1 + \dfrac{ix}{2p}\right)^{2p} + \left(1 - \dfrac{ix}{2p}\right)^{2p}}{2} = \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 - \dfrac{x^2}{4p^2 \tan^2 \dfrac{(2k+1)\pi}{4p}}\right)$.

4) Démontrer alors : $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \ln(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$.

5) En déduire : $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{8x}{(2k+1)^2\pi^2 - 4x^2}$.

6) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, vérifier l'identité : $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n} \zeta(n)$.

7) Démontrer enfin : $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(4^n - 1)}{\pi^{2n}} \zeta(2n) x^{2n-1}$.

Intégrales

Exercice 48. $\int_{t=0}^{1} t^t \,\mathrm{d}t$

1) A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\int_{t=0}^{1} t^t \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

2) Calculer la valeur commune des deux membres à 10^{-5} près.

Exercice 49. $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $\int_{t=0}^{1} \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 50. *Centrale PSI 1997*

Établir la convergence puis calculer la valeur de $\int_{t=0}^{1} \dfrac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 51. $\int_{t=0}^{x} \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Montrer que pour $x \in]-1,1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2} = -\int_{t=0}^{x} \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 52. *Intégrale elliptique*

Montrer que la longueur d'une ellipse de demi-axes a, b est :

$$L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2p}\frac{\binom{4p}{2p}\binom{2p}{p}}{4^{3p}(1-4p)}.$$

Exercice 53. *Norme L^2*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$.

Montrer, pour $0 \leqslant r < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta$.

Analycité

Exercice 54. *Série à valeurs réelles*

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in \mathring{D}(0,R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 55. *Formules de Cauchy*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{C}$ analytique. On note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0, R son rayon et d la distance de 0 à $\mathrm{fr}(U)$ ($d = +\infty$ si $U = \mathbb{C}$).

1) Montrer, pour $0 < r < \min(R,d)$ et $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta$.

2) Montrer que l'application $r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta$ est analytique sur $[0,d[$ (minorer le rayon de convergence du DSE de f en $r_0e^{i\theta}$ et majorer en module les coefficients lorsque θ décrit $[0,2\pi]$ et r_0 est fixé dans $[0,d[$ à l'aide d'un recouvrement ouvert de $[0,2\pi]$). En déduire que l'égalité du **1)** a lieu pour tout $r \in [0,d[$.

3) Pour $0 < r < d$ et $|z| < r$ on pose $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z} re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que g est la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à r et que g coïncide avec f sur $\mathring{D}(0,r)$.

Applications :

4) $R \geqslant d$.

5) Si $U = \mathbb{C}$ et f est bornée alors f est constante (thm de Liouville).

6) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annule pas alors P est constant (thm de d'Alembert-Gauss).

7) Si (f_n) est une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur U vers une fonction f alors f est analytique sur U (thm de Weierstrass, comparer avec le cas réel).

8) La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Exercice 56. *Formule des résidus*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant pour racines $z_1, \dots, z_k$ de multiplicités $m_1, \dots, m_k$ et $r \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{|z_1|, \dots, |z_k|\}$.

Montrer : $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \dfrac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{|z_j|<r} m_j$.

Exercice 57. *Croissance de f en fonction des coefficients*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

1: Pour tout $a > 0$, la fonction $z \mapsto f(z)e^{-a|z|}$ est bornée sur $\mathbb{C}$.

2: $\sqrt[n]{n!\,|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On utilisera les formules de Cauchy (cf. exercice **55**).

Exercice 58. *Centrale MP 2002*

1) Développer en série entière $f : z \mapsto z(1-z)^{-2}$. Montrer que f est injective sur $\mathring{D}(0,1)$.

2) Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins 1 à coefficients réels. On suppose f injective sur $\mathring{D}(0,1)$ et on veut prouver : $\forall\, n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n$.

a) Montrer pour $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ et en déduire : $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f(z)) \geqslant 0$.

b) Pour $0 < r < 1$ calculer $\int_{t=0}^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin nt\,\mathrm{d}t$. En déduire $|a_n|r^n \leqslant n|a_1|r$ et conclure.

Divers

Exercice 59. *Anneau des séries entières*

Soit A l'ensemble des suites (a_n) de complexes telles que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon non nul. On munit A de l'addition terme à terme et du produit de Cauchy noté $*$.

1) Vérifier que A est un anneau intègre. Quels sont les éléments de A inversibles ?

2) Soit $I_k = \{a = (a_n) \in A \text{ tq } a_0 = \ldots = a_k = 0\}$. Montrer que les idéaux de A sont $\{0\}$, A et les I_k, $k \in \mathbb{N}$.

3) Soit $f(x) = 2 - \sqrt{\dfrac{1-2x}{1-x}}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ alors la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $2u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n+1-k}$.

4) Soit $a = (a_n) \in A$ avec $a_0 = 1$ et $|a_n| \leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une unique suite $b = (b_n) \in A$ telle que $b_0 = 1$ et $b * b = a$. Pour prouver que le rayon de convergence de b est non nul on établira par récurrence que $|b_n| \leqslant u_n$.

5) Pour $a \in A$ quelconque, étudier l'équation $b * b = a$ d'inconnue $b \in A$.

Exercice 60. *Ulm MP* 2000*

Soit $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$, $p_1, \ldots, p_p \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$.

Pour $n > p$ on pose $z_n = e^{i\omega} \sum_{j=1}^{p} z_{n-j} p_j$. Étudier la suite (z_n).

Exercice 61. *X MP* 2001*

Soit D le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et rayon 1.

1) Soit $\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geqslant 1$ et $r \in]0,1[$. Montrer que

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2) Soit E l'ensemble des fonctions de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ continues et dont la restriction à D est somme d'une série entière. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ définit une norme sur E et que pour cette norme E est complet.

3) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est dense dans E.

Exercice 62. *Polynômes, Centrale 2013*

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon R et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1) Soit $0 \leqslant r < R$. Calculer en fonction de a_n, r et n l'intégrale $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

2) **a)** On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'alors f est constante.

b) On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme.

3) **a)** On suppose que les a_n sont réels. Montrer que $\sum a_n^2 r^{2n}$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de f.

b) On suppose que $R \geqslant 1$, que pour tout n, $a_n \in \mathbb{Z}$ et que f est bornée sur le disque unité ouvert. Montrer que f est un polynôme.

solutions

Exercice 2.

1) $R = 1$.
2) $R = 1$.
3) $R = 1$.
4) $R = \frac{1}{e}$.
5) $R = 1/\sqrt{b}$.
6) $R = 1$.
7) $R = 1$.
8) $R = 1$.
9) $R = \frac{1}{3}$.
10) $R = 1$.
11) $R = 1$.
12) $R = \sqrt{2} - 1$.
13) $R = \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.
14) $R = 0$.
15) $R = \frac{1}{2}$, $2t \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$.
16) $R = 1$, $a_n \sim (\ln n)/n^2$.
17) $R = 1$.

Exercice 4.

La suite $\left(\cos(\frac{2k\pi}{5} + \alpha)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 5, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit a celle de plus grande valeur absolue. Alors $R = \dfrac{1}{|a|}$.

Exercice 5.

$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \sim \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1, \\ \zeta(\alpha) & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$ Dans les trois cas, on obtient $R = 1$.

Il y convergence en $x = 1$ si et seulement si $\alpha < 0$ et il y a divergence grossière en $x = -1$ lorsque $\alpha > 1$ vu les équivalents. Pour $\alpha \leqslant 1$ et $x = -1$ il y a convergence (CSA).

Exercice 6.

1) (a_n) est bornée et (na_n) ne l'est pas, donc $R_a = 1$. $|b_n| \sim |a_n|$ donc $R_b = 1$.
2) Il y a doute seulement pour $x = \pm 1$. Le critère de convergence d'Abel (hors programme) s'applique, $\sum a_n x^n$ converge si $x = \pm 1$. $b_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + O(n^{-5/3})$ et le critère d'Abel s'applique aussi à $\sum a_n^3 x^n$ (linéariser le $\cos^3$), il y a aussi convergence pour $x = \pm 1$.

Résolution conforme au programme : regrouper par paquets de six termes.

Exercice 7.

1) $R' = R^2$.
2) $R' = \infty$.
3) $R' = eR$.

Exercice 8.

$\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'}\,)$.

Exercice 10.

1) Série produit de $a(z)$ et $\dfrac{1}{z-\rho} \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}\rho^k$.
2) Si $a(\rho) \neq 0$: $b(z)$ converge pour $|z| < \rho$ et tend vers l'infini pour $z \to \rho^- \Rightarrow R = \rho$.
Si $a(\rho) = 0$: $\forall\, r > \rho$, $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p} \Rightarrow |b_n| \leqslant \dfrac{M}{r^n(r-\rho)} \Rightarrow R = \infty$.

Exercice 11.

1) $]-1,2[$.

2) Pour $0 \leqslant k \leqslant 4^n$, on a $|a_k| \leqslant \binom{4^n}{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ (atteint pour $k = 4^n/2$).

Donc $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $x > 1$ alors $a_{3*4^n/2} x^{3*4^n/2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Exercice 12.

1) $= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1} + \dfrac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2\dfrac{x^{3n+3}}{3n+3} \right)$.

2) Factoriser : $-\ln 6 + (\frac{5}{6} + \ln 6)x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{2n+1}{3^n} \right) \dfrac{x^n}{n(n-1)}$.

3) Dériver le ln : $\sum_{n=1}^{\infty} -1/\binom{n-1}{2} \dfrac{x^{2n}}{2n-1}$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n$.

5) $\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 + 2\sqrt{2}^{\,n} (2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4))\Big) x^n$.

6) Intégrer : $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{4\sqrt{2}} \Big((-\sqrt{2}-1)^{n+2} - (\sqrt{2}-1)^{n+2}\Big) x^n$.

7) $= \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -1/\binom{n}{2}(-1)^n (x^{2n} - x^{2n+1})$.

8) Dériver : $\dfrac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^{\,n}} (-1)^n x^n$.

9) Dériver : $\dfrac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sin(n\pi/6)}{n2^n} x^n$.

10) Dériver, factoriser : $\sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{2^n + 2^{-n}}{n^2} x^n$.

11) Linéariser : $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} 4^n}{(2n)!} \left(x^{2n-1} + \dfrac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n} \right)$.

12) Dériver : $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)} x^{2n+1}$.

13) $y' = -4xy + 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{8^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

14) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^n$.

15) $(1-x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{9} = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n \binom{3n}{n}}{(2n+1)3^{3n+1}} x^{2n+1}$.

Exercice 13.

$= \frac{1}{2}\ln(e^a - x) + \frac{1}{2}\ln(e^{-a} - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{ch}(ka)}{k} x^k$.

Exercice 14.

$\dfrac{e^{x^2}}{1-x} = (1+x)\dfrac{e^{x^2}}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)(x^{2n} + x^{2n+1})$.

Exercice 15.

$f(\operatorname{sh} y) = e^{y/2}$ d'où l'équation différentielle : $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = \frac{1}{4}f(x)$.

En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on obtient $4(k+1)(k+2)a_{k+2} = -(2k+1)(2k-1)a_k$ avec $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$, d'où $a_{2p} = \dfrac{(-1)^{p+1}\binom{4p-2}{2p-1}}{p2^{4p}}$ si $p \geqslant 1$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p \binom{4p}{2p}}{2^{4p+1}(2p+1)}$ si $p \geqslant 0$.

Le rayon de convergence de la série correspondante est 1, ce qui valide la méthode (avec le thm. d'unicité de Cauchy-Lipschitz).

Exercice 16.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.

Exercice 17.

Coefficient de x^n dans $(\sum x^k)(\sum(k+1)x^k)(\sum(k+1)^2x^k) = \dfrac{1+x}{(1-x)^6}$

$\Rightarrow c_n = \binom{n+5}{5} + \binom{n+4}{5} = \dfrac{(2n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$.

Exercice 19.

1) $-1+\sqrt{x}\operatorname{argth}\sqrt{x}$ pour $0 \leqslant x < 1$ et $-1-\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

2) $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

3) $\dfrac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.

4) $\dfrac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).

5) $-\dfrac{1}{2}(x+(x^2+1)\arctan x)$ (décomposer en éléments simples).

6) $-1+\dfrac{u}{4}\operatorname{argth} u - \dfrac{u}{2}\arctan u$, $u = \sqrt[4]{x}$.

7) $\dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}\operatorname{argth}\sqrt{x}$ pour $0 \leqslant x < 1$ et $\dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{5}{2\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}$ pour $-1 < x \leqslant 0$.

8) $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2x\operatorname{ch} a + x^2)$.

9) $1 - \dfrac{5\cos 2\theta - 4}{(5-4\cos 2\theta)^2}$ (linéariser).

10) $\dfrac{2x-1}{(1-x)^2} - \dfrac{2\ln(1-x)}{x}$.

11) $\operatorname{ch}\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $\cos\sqrt{-x}$ pour $x \leqslant 0$.

12) $\dfrac{e^{x^2}}{2} - \dfrac{e^{x^2\cos 2\theta}}{2}\cos(x^2\sin 2\theta)$.

13) $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.

14) $\dfrac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f''' = f)$.

15) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.

16) $\dfrac{x^2-1}{2}$.

17) $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 20.

$R = \sqrt{2}-1$, $\sum = \dfrac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Exercice 21.

2) S'il existe $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$ tel que $|\lambda| \geqslant 1$ et si x est un vecteur propre associé alors $kA^kx = k\lambda^kx \not\to 0$ donc la série diverge.

Si toutes les valeurs propres de A sont de module < 1, comme $kA^k = \sum_\lambda \lambda^k P_\lambda(k)$ où les P_λ sont des polynômes à coefficients matriciels, la série converge absolument.

3) $S = \sum_{k=0}^\infty (k+1)A^{k+1} = AS + \sum_{k=0}^\infty A^{k+1} = AS + A(I-A)^{-1}$ donc $S = A(I-A)^{-2}$ est inversible ssi A l'est.

Exercice 22.

1) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$. $\chi_A(-1) > 0$, $\chi_A(0) < 0$, $\chi_A(1) > 0$, $\chi_A(2) > 0$, $\chi_A(3) < 0$ donc χ_A admet une racine dans chacun des intervalles $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]2,3[$.

2) Cayley-Hamilton : $t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$.

3) Soient $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < 2 < \gamma < 3$ les valeurs propres de A. On a $t_n z^n = (\alpha z)^n + (\beta z)^n + (\gamma z)^n$ donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ converge si et seulement si $|\gamma z| < 1$ et vaut :

$$\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\gamma z} = \frac{1}{z}\frac{\chi'}{\chi}(1/z) = \frac{-z^2-4z+3}{z^3-z^2-2z+1}.$$

Exercice 23.

$= -\int_{t=0}^{1} \dfrac{t^3}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1.$

Exercice 24.

$R = 1$. On décompose P sous la forme : $P = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \ldots + a_p(X+1)\ldots(X+p)$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \dfrac{a_0}{1-x} + \dfrac{a_1}{(1-x)^2} + \ldots + \dfrac{p!\,a_p}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 25.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\theta}{2^n} = \dfrac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\theta}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5-4\cos\theta)$.

Exercice 26.

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \dfrac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} t^n$ donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$.

Exercice 27.

1) Pour $|x| < \dfrac{1}{q}$: $\ln f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-q^n x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{q^{kn}x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{q^k x^k}{k(1-q^k)}$,

$f = e^{\ln f}$ est DSE par composition.

2) $a_n = \dfrac{q^{n(n+1)/2}}{(q-1)\ldots(q^n-1)}$, $R = \infty$.

Exercice 28.

$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}e^{-n} \geqslant k^{2k}e^{-k}$, donc $\dfrac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geqslant k^k e^{-k} \Rightarrow R = 0$.

Exercice 29.

Il y a dérivation terme à terme facilement et indéfiniment.

DSE au voisinage de 0 : on envisage de permuter les $\sum$ dans : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} \dfrac{(inx)^p}{p!}$, ce qui est légitime si la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha}e^{n|x|}$ converge. On en déduit qu'une condition suffisante pour que f soit DSE au voisinage de 0 est $\alpha \geqslant 1$ (avec convergence si $x \in\,]-1,1[$ pour $\alpha = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha > 1$).

Cas $\alpha < 1$: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} n^k \geqslant e^{-N^\alpha}N^k$ avec $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$ donc pour $r > 0$ fixé et k tendant vers l'infini on a $\ln\Big(\Big|\dfrac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}\Big|\Big) \sim \Big(\dfrac{1}{\alpha} - 1\Big)k\ln(k)$ et la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}$ diverge grossièrement.

DSE au voisinage de $a \neq 0$: même raisonnement en écrivant $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{ina} \dfrac{(in(x-a))^p}{p!}$.

En conclusion, f est analytique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

Exercice 30.

1) Pour $x \neq 0$ la série comporte un nombre fini de termes non nuls au voisinage de x, donc est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x. On a $|f^{(k)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{k-n} \varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \lambda_n^{k-n} M_n \leqslant \text{cste}(k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| M_n/\lambda_n$ en supposant $\lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant k$, donc $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que f est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et on a le développemment limité : $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + o(x^k)$ car $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0 donc $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$.

2) $\psi(x) = \exp\Big(\dfrac{1}{(1-x)(x-2)}\Big)$ sur $]1,2[$, $\psi(x) = 0$ ailleurs.

Exercice 31.

1) $R = 1$.

2) $x = -1 \Rightarrow$ cv (série alternée), $x = 1 \Rightarrow$ dv.

3) f est croissante sur $[0,1[$ donc L existe dans $[0,+\infty]$.
$L = \sup\limits_{[0,1[} f(x) \geqslant \sup\limits_{[0,1[} \sum_{n=1}^{n} x^n \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{n} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow L = +\infty$.

Exercice 32.

1) Fonction croissante. $\lim_{x\to 1^-} A(x) \geqslant \sum_{n=0}^{n} a_n$.

2) Dém de type Césaro.

Exercice 33.

Continuité radiale.

Exercice 34.

$\dfrac{c_n}{b_n} = a_0 + a_1 \dfrac{b_{n-1}}{b_n} + \ldots + a_n \dfrac{b_0}{b_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_{n,k}$ et le thm de convergence dominée s'applique.

Exercice 35.

1) Pour tout $n \geqslant 3$, $1 \leqslant \ln n \leqslant n$. On en déduit que le rayon de convergence vaut 1.

2) Pour tout $x \in\,]-1,1[$, $(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n\, x^{n+1}$
Or $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln(n+1)\, x^{n+1}$, donc $(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\ln n - \ln(n+1)) x^{n+1}$, donc, pour tout $x \in\,]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x} (\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+\dfrac{1}{n}) x^{n+1})$.

3) Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum (-1)^{n+1} \ln(1+\dfrac{1}{n}) x^{n+1}$ vérifie le critère des séries alternées et donc, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 1$, $|R_n(x)| \leqslant \ln(1+\dfrac{1}{n}) x^n \leqslant \dfrac{1}{n}$, ce qui montre la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série entière. On peut donc en déduire que S a une limite en 1^- et que cette limite vaut $\dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+\dfrac{1}{n})$.

Exercice 36.

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n-2} x^n}{\prod_{2\leqslant k\leqslant n} (3k+2)}$, $R = \infty$.
$N = 8 \Rightarrow 0.409954 \leqslant y(1) \leqslant 0.409973$.

Exercice 37.

1) $\tan^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}$.

2) Pour $0 \leqslant x < \pi/2$ la série est à termes positifs et les sommes partielles sont majorées par $\tan x$. Pour $-\pi/2 < x \leqslant 0$, il y a convergence absolue.

4) Si $R > \pi/2$, f aurait une limite finie en $\pi/2$.

Exercice 38.

1) Pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$ les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy est donc absolument convergent et de somme égale au produit des sommes. On obtient, pour tout $x \in]-\alpha,\alpha[$, $1 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}\Big)x^{2n}$. Par unicité du développement en série entière on a, pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0$, ce qui donne $E_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k}E_k$.

2) $\tan' = 1+\tan^2$, donc $F_1 = 1 > 0$. Si l'on a $\tan^{(2n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1}\alpha_j \tan^{2j}$, alors

$$\tan^{(2n+2)} = \sum_{j=1}^{n+1} 2j\alpha_j \tan^{2j-1}(1+\tan^2),$$
$$\tan^{(2n+3)} = \sum_{j=1}^{n+1} 2j(2j-1)\alpha_j \tan^{2j-2}(1+\tan^2) + 2\sum_{j=1}^{n+1} 2j\alpha_j \tan^{2j}(1+\tan^2),$$

qui est bien de la forme $\sum_{j=0}^{n+2}\beta_j \tan^{2j}$, avec pour tout j, $\beta_j > 0$. On en déduit $F_n > 0$ pour tout n.

3) On a $\varphi'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(x)} = \tan(x)\varphi(x)$. On a donc, pour tout $x \in]-\beta,\beta[$ (où $\beta = \min(\alpha, \frac{\pi}{2})$), $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{E_n}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \big(\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{F_k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\big) \times \big(\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{E_p}{(2p)!}x^{2p}\big)$.
En faisant un changement d'indice dans la première somme et en faisant le produit de Cauchy on a $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{E_k F_{n-k}}{(2k)!(2n+1-k)!}\Big)x^{2+1}$. On en déduit que, pour tout n, $E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}E_k F_{n-k}$.

Exercice 39.

1) Produit de deux séries $\Rightarrow R \geqslant 1$. $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow R = 1$.

2) $(1-x^2)y' = xy+1 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n \Rightarrow a_{2k} = a_0\dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}$, $a_{2k+1} = a_1\dfrac{4^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$.

$a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{4^k x^{2k+1}}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$.

3) $\arcsin^2 x = 2\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^{2k-1}x^{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}$.

Exercice 40.

1) $R = 4$.

2) $y = 4\sqrt{\dfrac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} - \arctan\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} + c\right)$. $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x) \Rightarrow c = \dfrac{\pi}{2}$.
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Exercice 41.

1) $R = \sqrt{2}$.

2) Stirling $\Rightarrow a_n\sqrt{2}^{\,2n+1} \sim \dfrac{2}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ DV.

3) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2\arcsin(x/\sqrt{2}\,)}{\sqrt{2-x^2}}$.

Exercice 42.

2) $f'(x) = e^x f(x)$.

Exercice 43.

1) On classe les permutations selon k leur nombre de points fixes. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les points fixes puis pour chaque choix, S_{n-k} façons de construire une permutation ayant k points fixes donnés. Il y a donc $\binom{n}{k} S_{n-k} = \binom{n}{n-k} S_{n-k}$ permutations ayant exactement k points fixes. On en déduit les relations $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$.

2) a) Pour tout n, $S_n \leqslant n!$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{S_n}{n!} x^n$ est $\geqslant 1$.

b) Le produit de Cauchy donne $f(x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{S_k}{k!(n-k)!})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

c) Pour tout $|x| < 1$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!})x^n$. Par unicité du développement en série entière on a, pour tout n, $S_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

d) On a $S_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} = \dfrac{n!}{e} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k!}$,

donc $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2} = S_n + \dfrac{1}{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{n!}{k!}$. Or $|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{n!}{k!}| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit, pour $n \geqslant 2$, que $0 \leqslant \dfrac{1}{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{n!}{k!} < 1$ et donc que $S_n = E(\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2})$. On vérifie que $S_0 = S_1 = 0$ et que la formule est vraie pour tout n.

Exercice 44.

1) $a_n \leqslant n!$ par récurrence.

2) $2f' = f^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1 - x/2}$.

3) $a_n = n!\, 2^{-n}$.

Exercice 45.

$Z(x) = \sum_{n,p \geqslant 1} \dfrac{x^n}{p^{2n}} = \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{x}{p^2 - x}$.

$Z'(x) = \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{p^2}{(p^2 - x)^2} = \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{1}{p^2 - x} + \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{x}{(p^2 - x)^2}$.

$Z^2(x) = \sum_{p,q \geqslant 1} \dfrac{x^2}{(p^2 - x)(q^2 - x)} = \sum_{p \neq q} \dfrac{x^2}{q^2 - p^2}\Big(\dfrac{1}{p^2 - x} - \dfrac{1}{q^2 - x}\Big) + \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{x^2}{(p^2 - x)^2}$

$Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = 2 \sum_{p \neq q} \dfrac{x^2}{(q^2 - p^2)(p^2 - x)}$.

A p fixé, $\sum_{q \neq p} \dfrac{1}{q^2 - p^2} = \dfrac{1}{2p} \sum_{q \neq p}\Big(\dfrac{1}{q-p} - \dfrac{1}{q+p}\Big) = \dfrac{1}{2p}\Big(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2p}\Big) = \dfrac{3}{4p^2}$.

Donc $Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = \dfrac{3}{2} \sum_{p \geqslant 1} \dfrac{x^2}{p^2(p^2 - x)} = \dfrac{3}{2}(Z(x) - x\zeta(2))$.

Rmq : $2Z(x^2) = 1 - \pi x \operatorname{cotan}(\pi x)$ (Euler).

Exercice 46.

$\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$.

Exercice 48.

1) $t^t = \exp(t \ln t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k \ln^k t}{k!}$.

2) 0.78343

Exercice 49.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t=0}^{1} -\dfrac{t^n \ln t}{n}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 50.

Développer en série entière $\ln(1 - t^2)$. $I = \dfrac{\pi^2}{2} - 4 \ln 2$.

Exercice 55.

1) calcul.

2) Soit $0 < r_0 < d$ et $R(\theta)$ le rayon de la série de Taylor de f en $r_0e^{i\theta}$. Le cercle de centre 0 et de rayon r_0 est recouvert par les disques ouverts $D(r_0e^{i\theta}, \frac{1}{2}R(\theta))$, θ variant de 0 à 2π, donc on peut en extraire un recouvrement fini ; soit ρ le rayon minimum des disques extraits. Alors pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ on a $R(\theta) \geqslant \rho$ (cf. analycité de la somme d'une série entière dans le disque ouvert de convergence).

D'après la première question on a : $\left|\dfrac{f^{(n)}(r_0e^{i\theta})}{n!}\right| \leqslant \dfrac{M}{\rho^n}$ où M majore $|f|$ sur $\overline{D}(0, r_0+\rho)$ d'où pour $|r - r_0| < \rho$:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}(r-r_0)^k e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(r-r_0)^k\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

ce qui démontre l'analycité de $\varphi = r \mapsto \int_{\theta=0}^{2\pi}\dfrac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta$ sur $]0, d[$.

Enfin, $\varphi(r) = a_nr^n$ au voisinage de 0 d'où $\varphi(r) = a_nr^n$ sur $[0, d[$ par prolongement analytique.

3) $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\dfrac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\dfrac{f(re^{i\theta})}{r^ke^{ik\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$.

Le rayon est au moins égal à r car f est bornée sur $\overline{D}(0, r)$.

4) résulte de **3**.

5) D'après **1**, $|a_n| \leqslant \|f\|_\infty/r^n$ pour tout $r > 0$ donc $a_n = 0$ si $n \geqslant 1$.

6) $1/P$ est analytique bornée sur $\mathbb{C}$.

7) On peut passer à la limite uniforme (ou dominée) dans **3**.

8) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \Rightarrow f\circ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n(z)$ et il y a convergence localement uniforme.

Exercice 57.

$2 \Rightarrow 1$: évident.

$1 \Rightarrow 2$: Soit $a > 0$ et $M = \sup(|f(z)|e^{-a|z|})$.

$a_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\dfrac{f(Re^{i\theta})}{R^ne^{in\theta}}\,d\theta \Rightarrow |a_n| \leqslant M\dfrac{e^{aR}}{R^n} \leqslant M\inf\limits_{R>0}\dfrac{e^{aR}}{R^n} = M\left(\dfrac{ea}{n}\right)^n$.

Donc $\sqrt[n]{n!\,\|a_n\|} \leqslant \sqrt[n]{n!}\dfrac{ea}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. CQFD

Exercice 58.

1) $\dfrac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}nz^n$ $(R = 1)$.

Pour $z, t \in \mathring{D}(0,1)$ on a $\dfrac{z}{(1-z)^2} - \dfrac{t}{(1-t)^2} = \dfrac{(z-t)(1-zt)}{(1-z)^2(1-t)^2}$, quantité nulle si et seulement si $z = t$, d'où l'injectivité de $z \mapsto \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

2) **a)** $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z}) \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Par injectivité, on en déduit que $\mathrm{Im}(f(z))$ garde un signe constant sur chaque demi-disque limité par $]-1, 1[$, et comme $f(z) = z + o_{z\to 0}(z)$, ce signe est celui de $\mathrm{Im}\,z$.

b) $\int_{t=0}^{\pi}\mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin nt\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi a_nr^n}{2}$. On a $|\sin(nt)| \leqslant n\sin(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$ par récurrence, donc $\dfrac{\pi|a_n|r^n}{2} \leqslant n\int_{t=0}^{\pi}\mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin t\,\mathrm{d}t = \dfrac{n\pi a_1r}{2}$. On en déduit $|a_n|r^n \leqslant n|a_1|r$ et on conclut $|a_n| \leqslant n$ en faisant tendre r vers 1.

Exercice 60.

On pose, sous réserve de convergence, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n t^n$. Alors :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n + \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j \sum_{n=p+1}^{\infty} z_{n-j} t^n = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n + \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \Big(f(t) - \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n \Big)$$

soit :

$$\Big(1 - \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \Big) f(t) = P(t) f(t) = \sum_{n=1}^{p} z_n t^n - \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n = Q(t),$$

donc $f(t) = Q(t)/P(t)$. Réciproquement, soit $Q(t)/P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$: en remontant les calculs précédents on voit que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (z_n) avec les mêmes premiers termes d'où $z_n = a_n$ pour tout n.

Si $|t| < 1$ alors $\left| \sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j \right| < 1$ donc P n'a pas de racine dans le disque unité ouvert. Si P n'a pas non plus de racine sur le cercle unité alors le développement en série entière de $Q(t)/P(t)$ a un rayon > 1 et $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si P admet des racines dans $\mathbb{U}$ on peut déja dire que la suite (z_n) est bornée par $\max(|z_1|, \dots, |z_p|)$ puis… ?

Exercice 61.

2) Complétude : soit (f_k) une suite d'éléments de E de Cauchy, $f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} z^n$. On a à k et n fixés, par convergence dominée :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi r^n} \int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = a_{n,k}.$$

La suite (f_k) converge uniformément sur $\overline{D}$ vers une fonction $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue. On note :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}.$$

La suite (a_n) est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $z \in D$ fixé on a alors :

$$\begin{aligned} f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} z^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_k(e^{i\theta}) e^{-in\theta} z^n \Big) \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f_k(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} \,\mathrm{d}\theta \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} z^n \Big) \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\varphi \in E$. Enfin on a $\|f_k - \varphi\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par convergence uniforme, d'où $\varphi = \lim_{k\to\infty} f_k$ dans E.

3) Soit $f \in E$ et $f_n(z) = f\Big(\dfrac{nz}{n+1}\Big)$. Comme f est uniformément continue, f_n converge uniformément vers f sur $\overline{D}$. Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Comme f_n est développable en série entière avec un rayon au moins égal à $1 + \dfrac{1}{n}$, son développement converge uniformément vers f_n sur $\overline{D}$ donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|f_n - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Exercice 62.

1) $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^n e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $|a_k r^n e^{i(k-n)\theta}| \leqslant |a_n|r^n$ qui est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions (de la variable θ) converge donc normalement sur $[0, 2\pi]$. On a donc $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a_n r^n$.

2) a) On a, pour tout n, $2\pi|a_n|r^n \leqslant \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\|f\|_\infty$. On divise par r^n et on fait tendre r vers l'infini. Il vient $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ donc f est constante.

b) On pose $P(z) = \sum_{k=0}^{d} b_k z^k$. On a, pour tous r et n, $|a_n|r^n \leqslant \sum_{k=0}^{d} |b_k|r^k$. Pour $n \geqslant d+1$ on divise par r^n et on fait tendre r vers $+\infty$. Il vient $a_n = 0$ et f est un polynôme.

3) a) $\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{n,p\in\mathbb{N}} a_n\overline{a_p} r^{n+p} e^{i(n-p)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n}$.

b) Soit M tel que, pour tout $|z| < 1$, $|f(z)| \leqslant M$.
Pour tout n, pour tout $r < 1$ on a $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 r^{2k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 r^{2k} \leqslant M^2$. On peut faire tendre r vers 1 et en déduire que, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant M^2$. On en déduit que la série $\sum a_k^2$ converge. En particulier la suite a_k converge vers 0. Or c'est une suite d'entiers donc elle est nulle à partir d'un certain rang, ce qui montre que f est un polynôme.