Séries numériques

Exercice 1. *Étude de convergence*

Étudier la convergence des séries de terme général :

1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$. **2)** $\operatorname{ch}^\alpha n - \operatorname{sh}^\alpha n$. **3)** $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.

4) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$. **5)** $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$. **6)** $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

7) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$. **8)** $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$. **9)** $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.

10) $\dfrac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$. **11)** $\dfrac{1!+2!+\dots+n!}{(n+2)!}$. **12)** $\dfrac{1!-2!+\dots\pm n!}{(n+1)!}$.

13) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$. **14)** $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$. **15)** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

16) $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}\,]}}{n}$. **17)** $\dfrac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$. **18)** $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 2. *Centrale PC 1999*

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme. A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 3. *Ensi PC 1999*

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\Bigl(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Bigr)$?

Exercice 4. *Mines MP 2000*

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 5. *Mines MP 2003*

Si $\alpha > 0$, donner la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$, $\sum_{n\geqslant 2} \ln\Bigl(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\Bigr)$ et $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln n}$.

Exercice 6. *Ensi PC 1999*

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 7. *Encadrement*

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 8. *Calcul approché*

Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty \Bigl(n\sin(0.4/n)\Bigr)^n$ converge. Calculer à la machine une valeur approchée à 10^{-8} près de sa somme.

Exercice 9. *Ensi MP 2002*

On suppose que la série à termes positifs de terme général u_n est divergente et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application continue décroissante. Comparer les énoncés :

1. f est intégrable
2. La série de terme général $u_n f(S_n)$ converge.

Exercice 10. *Centrale P' 1996*

Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Exercice 11. $\binom{2n}{n}/n4^n$

L'une au moins des deux séries : $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{n4^n}$ et $\sum \frac{n4^n}{\binom{2n}{n}}$ diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.

Exercice 12. $1/(1+n^2u_n)$, *Mines-Ponts MP 2005*

Soit (u_n) une suite réelle positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Étudier le cas où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 13. $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$

Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 14. $1/a^{\text{nb de chiffres de } n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n (sans zéros inutiles). Soit $a > 0$. Étudier la convergence et déterminer la somme éventuelle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Exercice 15. *Cauchy-Schwarz*

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1) Montrer que $\sum u_nv_n$ converge.

2) Montrer que $\sum(u_n+v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum(u_n+v_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

Exercice 16. $(-1)^n/(n^{3/4}+\cos n)$

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.

1) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

2) En écrivant $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 17. *Reste d'une série alternée*

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 18. *Calcul de sommes*

Calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
5) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
6) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

7) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.
8) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.
9) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.

10) $\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} x^n$.
11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.
12) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Exercice 19.

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Exercice 20. *Chimie P 90*

1) Résoudre les équations différentielles : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y=2e^{-x}\cos x$.

2) Soit f la solution commune. On définit la série de terme général $u_n = \int_{x=n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 21. $1/n^2(n+1)^2$

On admet que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Exercice 22. $1/(1^2+2^2+...+n^2)$
On admet que $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln 2$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 23. $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$
Pour quelles valeurs de $a,b\in\mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer alors la somme de la série.

Exercice 24. $\arctan(1/(k^2+k+1))$
Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty}\arctan\Big(\dfrac{1}{k^2+k+1}\Big)=\dfrac{\pi}{2}$ (on pourra calculer $\tan s_n$).

Exercice 25. $\arctan(n+a)-\arctan n$
Soit $a\in\mathbb{R}$.
1) Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a)-\arctan n$ est convergente.
2) On pose $S(a)=\sum_{k=0}^{\infty}(\arctan(k+a)-\arctan k)$. Trouver $\lim_{a\to+\infty}S(a)$.

Exercice 26. *Pile en porte à faux*
Peut-on empiler 100 pièces de 1€ de sorte que la dernière soit complètement en porte à faux ? (cad que sa projection sur un plan horizontal ne rencontre pas la projection de la première pièce)

Exercice 27. $\sum 1/n$, *Mines MP 2010*
On définit $k_j=\min\{k\in\mathbb{N}\text{ tq }\sum_{n=1}^{k}1/n\geqslant j\}$.
1) Prouver l'existence de k_j. Quelle est la limite de k_j lorsque j tend vers l'infini ?
2) Calculer $\lim_{j\to\infty}(k_{j+1}/k_j)$.

Exercice 28. *Recherche d'équivalents*
Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :
1) $\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2) $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}$.

Exercice 29. $\ln^2(k)$
Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k$. La série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 30. $k^{-2/3}$
Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9}k^{-2/3}$.

Exercice 31. $(-1)^k\sqrt{k}$
On pose $u_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n quand $n\to\infty$ (regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale).

Exercice 32. *Constante d'Euler*
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ décroissante. On pose $u_n=f(n)$ et $s_n=u_0+\ldots+u_n$.

Montrer que la suite de terme général $s_n-\int_{t=0}^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donner une interprétation graphique de ce fait.

Application : On pose $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$. Justifier l'existence de γ et montrer que $\dfrac{1}{2}\leqslant\gamma\leqslant 1$.

Exercice 33. *Constante d'Euler (Centrale MP 2003)*
Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n}-\ln n$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n}-\ln n$. Les suites (S_n) et (T_n) sont-elles adjacentes ?

Exercice 34. *Constante d'Euler, Mines-Ponts MP 2005*

Soit $u_{n,k}$ le reste de la division du n par k. Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$?

Exercice 35. *Mines MP 2003*

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots + \frac{\ln n}{n}$.

1) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

2) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.

3) Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Exercice 36. *Centrale MP 2001*

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2}$.

Exercice 37. $1/n\ln^2(n)$

1) Prouver la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$.

2) On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=2}^{\infty} u_k$. Montrer que $\frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{\ln n}$ pour $n \geqslant 2$.

3) Montrer que si S_n est une valeur approchée de S à 10^{-3} près alors $n > 10^{434}$.

4) On suppose disposer d'une machine calculant un million de termes de la série par seconde avec 12 chiffres significatifs. Peut-on obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ? (Rmq : 1 an $\approx$ 32 millions de secondes)

5) Donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 38. $(x-1)\zeta(x) \to 1$

Pour $x > 1$ on note $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, trouver $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\zeta(x)$.

Exercice 39. $u_n/(1+u_n)$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 40. *Série des restes*

1) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$.

a) Montrer que $nv_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$.

2) Application : Calculer lorsque c'est possible : $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Exercice 41. *X MP* 2001*

Soit (u_n) une suite réelle positive, $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\alpha > 0$ un réel donné. On suppose $\frac{U_n}{nu_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Étudier la suite de terme général $\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k$.

Exercice 42. $\sum nu_n$ *converge*

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} nu_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Exercice 43. (u_n) *décroit*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (considérer $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$).

2) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3) Application : calculer pour $0 \leqslant r < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Exercice 44. u_n/S_n

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs convergeant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1) Si la série $\sum u_n$ converge, que dire de la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$?

2) Si la série $\sum u_n$ diverge, montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.

On pourra considérer $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{u_k}{S_k}\right)$.

Exercice 45. *Polytechnique MP* 2000*

On donne une suite de réels strictement positifs (a_n), décroissante et de limite nulle. Montrer que la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Exercice 46. $(u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1})/n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1}}{n}$. Montrer que $\sum v_n$ a même nature que $\sum u_n$.

Exercice 47. $\sum ku_k/n(n+1)$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite positive. On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et éventuellement même somme.

Exercice 48. $\sum ku_k/n^2$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

Étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} ku_k$.

Exercice 49. *Principe d'accumulation*

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Applications :

– Retrouver la convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

– Étudier la convergence des séries de Bertrand : $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Exercice 50. $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. *Ensi P 90*

Soit (u_n) définie par : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 51. $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (on étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$).

3) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

Exercice 52. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

3) Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.

4) Montrer que $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.

5) On pose $u_n = \dfrac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

6) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 53. $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1) Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.

2) On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).

3) En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Exercice 54.

On se donne u_1 et a deux réels strictement positifs et l'on définit par récurrence la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^a u_n}$ ... Étudiez la limite de la suite (u_n), et, quand $a \leqslant 1$, en donner un équivalent.

Exercice 55. $1/k^\alpha (n-k)^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 56. *Produit de Cauchy de trois séries*

Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ trois séries absolument convergentes de sommes A, B, C.
On pose $u_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Montrer que $\sum u_n = ABC$.

Exercice 57. *Produit de séries géométriques*

Soient $a \in [0,1[$. Écrire $\dfrac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^\infty k a^k$. Calculer par la même méthode $\sum_{k=0}^\infty k^2 a^k$.

Exercice 58. *Produit de séries géométriques*

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note T_n le nombre de manières de décomposer n euros avec des pièces de 1€ et 2€ et des billets de 5€ et 10€ ($T_0 = 1$). Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^\infty T_k x^k = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

Exercice 59. $\sum u_k/2^{n-k}$

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1} + \dfrac{u_{n-1}}{2} + \ldots + \dfrac{u_0}{2^n}$.

1) Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Montrer que $\sum v_n$ converge et donner sa valeur.

Exercice 60. $\sum a_n/n^p = 0$

Soit (a_n) une suite bornée telle que pour tout entier $p \geqslant 2$: $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{a_n}{n^p} = 0$.

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0$.

Exercice 61. $\sum x_{kn} = 0$

Soit $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ une série absolument convergente telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\sum_{n=1}^\infty x_{kn} = 0$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0$.

Exercice 62. *Césaro*

1) Soient $k, p \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant p$. Montrer que $\sum_{n=k}^p \dfrac{\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}}{2^n} = \dfrac{\binom{p+1}{k+1}}{2^p}$.

2) Soit (u_n) une série convergente. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p$. Montrer que la série (v_n) est convergente.

Exercice 63. $nu_n \to 0$

Soit (u_n) une série convergente à termes positifs décroissants.

1) Montrer que $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Montrer que $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \dfrac{1}{u_k} = o(n^2)$.

Exercice 64. u_n/R_n^p

Soit (a_n) une série positive convergente, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $p \in]0,1[$.

1) Montrer qu'il existe $C_p \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/R_n^p \leqslant C_p A^{1-p}$.

2) Trouver la meilleure constante C_p.

Exercice 65. $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Soit (a_n) une suite réelle positive et (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$ avec $u_0 > 0$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 66. *Raabe-Duhamel*

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$.

Exercice 67. *Stirling++*

Montrer que $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

Exercice 68. *Développement factoriel*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers (q_i) telles que $q_0 \geqslant 2$.

1) Si $s = (q_i) \in \mathcal{S}$, montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{q_0 \cdots q_k}$ converge. On note $\Phi(s)$ sa somme.

2) Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{S} \to]0,1]$ est bijective.

3) Soit $s = (q_i) \in \mathcal{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si s est stationnaire.

Exercice 69. *Développement asymptotique*

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} = \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.

2) Prouver : $\dfrac{\ln 2}{2} - \int_{t=1}^{3} \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant C \leqslant \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} - \int_{t=1}^{3} \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Prouver : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} = \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + C + \dfrac{\ln n}{2n} + o\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)$.

Exercice 70.

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\dfrac{1}{\ln(n)}\left(\dfrac{u_1}{1} + \ldots + \dfrac{u_n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 71.

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge au sens de Césaro vers zéro.
Étudiez la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{u_k}{n+k+1} \ldots$

Exercice 72. *Centrale MP 2000*

Soient deux suites de termes généraux u_n et v_n définies par la donnée de u_1 et v_1, tous deux réels, et les relations :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Montrer que ces suites sont définies et bornées.

Exercice 73. *Produits infinis, Polytechnique 2000*

On considère une suite (a_n) de réels et on définit $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1) On suppose que pour tout n, $a_n \geqslant 0$.

a) Montrer que, pour tout N, $1 + S_N \leqslant P_N \leqslant e^{S_N}$.

b) Comparer les convergences respectives des suites (S_N) et (P_N).

2) On suppose maintenant que pour tout n, $-1 \leqslant a_n \leqslant 0$.

a) La relation précédente est-elle encore vérifiée ?

b) Discuter de la convergence des suites (S_N) et (P_N).

3) On suppose que (a_n) est de signe quelconque et que pour tout n, $1 + a_n > 0$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que (P_N) a une limite et que cette limite est nulle si et seulement si $\sum a_n^2$ diverge.

4) Complément. On suppose que la suite (a_n) est complexe, que pour tout n, $|a_n| < 1$ et que la série $\sum |a_n|$ est convergente.

a) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, puis que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe. On pourra démontrer et utiliser l'inégalité $\left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) - 1\right| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|) - 1$.

b) Montrer que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ n'est pas nul.

Exercice 74. *Polytechnique MP 2002*

Trouver les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall\, x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 75. *ENS Cachan MP* 2005*

Soit $P(n) = \max\{p \text{ premier}, p \mid n\}$. Montrer que $\sum_n \dfrac{1}{nP(n)}$ converge.

Exercice 76. $\cos z \in [-1,1]$

Quels sont les complexes z tels que $\cos z \in [-1,1]$?

Exercice 77. $\lim((1+z/n)^n)$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z$.

Exercice 78. *Inégalité*

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}$.

Exercice 79. *Inégalité, Polytechnique MP* 2006*

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$. Montrer que $\left|\dfrac{e^z - 1}{z}\right| \leqslant \left|\dfrac{e^x - 1}{x}\right|$. Que dire en cas d'égalité ?

Exercice 80. *Morphismes* $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C},*)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1) Si f est dérivable, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\lambda x}$.

2) Obtenir le même résultat si f est seulement supposée continue (prendre une primitive, F, de f et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$).

Exercice 81. $e^z = z$

Montrer qu'il existe une infinité de complexes z tels que $e^z = z$ (on calculera x en fonction de y, et on étudiera l'équation obtenue).

Exercice 82. *Équations trigonométriques*

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $\cos z = 2$.

2) $\operatorname{ch} z = -1$.

3) $\sin z + \sin jz + \sin j^2 z = 0$.

4) $8\cos z + 4i \sin z = 7 + 5i$.

Exercice 83. $|\cos|$ *et* $|\sin|$ *sur le cercle unité*

Calculer $\sup\{|\cos z| \text{ tq } |z| \leqslant 1\}$ et $\sup\{|\sin z| \text{ tq } |z| \leqslant 1\}$.

Exercice 84. *Courbes*

Soient M, M' deux points du plan d'affixes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) On suppose que z et z' sont liés par la relation : $z' = e^z$. Étudier la courbe décrite par M' lorsque M décrit :

a) une droite $x =$ cste.

b) une droite $y =$ cste.

c) une droite quelconque.

2) Reprendre les questions **1a)** et **1b)** avec $z' = \cos z$.

Exercice 85. *Centrale MP 2002*

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.

Exercice 86. *Famille non sommable*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, il existe $X \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\in X} a_n = x$.

Exercice 87. *Famille sommable, Centrale 2015*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $u_n = 0$ si l'écriture décimale de n comporte au moins un chiffre égal à 9 et $u_n = 1/n$ sinon. Soient $S_n = u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = S_{10^{n+1}-1} - S_{10^n-1}$. On note A_n l'ensemble des entiers $k \in [\![10^n, 10^{n+1} - 1]\!]$ tels que $u_k \neq 0$.

1) Écrire en Python les fonctions donnant u_n, S_n, T_n. Donner S_{999}, S_{9999}, T_2 et T_3.

2) Montrer que $\sum u_n$ converge.

3) Nous allons chercher à approcher $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

a) Montrer que $T_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{8} \sum_{k\in A_n} u_{10k+\ell}$.

b) Montrer que $\frac{9}{10}T_n - \frac{36}{10^{n+2}}T_n \leqslant T_{n+1} \leqslant \frac{9}{10}T_n$.

c) En déduire un encadrement de $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

solutions

Exercice 1.

1) $\sim -\dfrac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.

2) $\sim \dfrac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV ssi $\alpha < 2$.

3) $\sim -\dfrac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.

4) $\sim \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.

5) $\sim \sqrt{\dfrac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.

6) cv ssi $|a| \neq 1$.

7) Série alternée $\Rightarrow$ CV.

8) Série alternée $\Rightarrow$ CV.

9) Harmonique + alternée $\Rightarrow$ DV.

10) d'Alembert $\Rightarrow$ CV.

11) $\leqslant \dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.

12) $= \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \Rightarrow$ CV.

13) Décomposition en 3 séries alternées $\Rightarrow$ CV.

14) $= \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.

15) Regroupement de termes $\Rightarrow$ DV.

16) Regroupement par paquets + CSI $\Rightarrow$ CV.

17) $\not\longrightarrow 0 \Rightarrow$ DV.

18) $= \dfrac{1}{n^{\ln\ln n}} \Rightarrow$ CV.

Exercice 2.

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C$.

Exercice 3.

$= \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \Rightarrow$ converge.

Exercice 4.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \dfrac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\Big(\dfrac{1}{n^{3\alpha/2}}\Big)$, il y a convergence ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Exercice 5.

Effectuer un développement asymptotique pour les deux premières. Elles convergent si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La troisième diverge par comparaison série-intégrale.

Exercice 6.

$\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$ donc il y a convergence si $|ab| < 1$.

Exercice 8.

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Exercice 9.

$1 \Rightarrow 2$ par comparaison série-intégrale. Contre-exemple pour $2 \not\Rightarrow 1$: $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Exercice 10.

$\dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} - \dfrac{1}{n^2-1} = -\dfrac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geqslant -\dfrac{4}{n^4}$ pour $n \geqslant 3$.

Donc $S = \sum_{n=1}^{n} \dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1} + R_N$ avec $-\dfrac{4}{3N^3} \leqslant R_N \leqslant 0$ et

$\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$.

Pour $N = 25$ on obtient : $0.76981 < S < 0.76990$.

Exercice 12.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $n^2 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ donc $u_n v_n \sim 1/n^2$. Alors les suites $(\sqrt{u_n})$ et $(\sqrt{v_n})$ sont de carrés sommables tandis que la suite $(\sqrt{u_n v_n})$ n'est pas sommable, c'est absurde.

Si $\sum u_n$ diverge on ne peut rien dire : avec $u_n = 1$ on a $\sum v_n$ convergente tandis qu'avec $u_n = \dfrac{1}{n}$ on a $\sum v_n$ divergente.

Exercice 13.

1) $u_1 + \ldots + u_n = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_n)} \leqslant 1$.

2) $\ln\big((1+a_1)\ldots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$.

Exercice 14.

Regroupement de termes par valeur constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{10^p - 10^{p-1}}{a^p} = \dfrac{9}{a-10}$.

Exercice 16.

2) $|v_n| = O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Exercice 17.

Série alternée.

Exercice 18.

1) $\dfrac{3}{4}$.

2) $\dfrac{1}{4}$.

3) $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \dfrac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \dfrac{1}{pp!}$.

4) $\dfrac{23}{144}$.

5) $\ln 3$.

6) $-\ln 2$.

7) $\ln\left(\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

8) $\dfrac{1}{\alpha} - 2\,\mathrm{cotan}(2\alpha)$.

9) $109 - 40e$.

10) $\dfrac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x| < 1$ par récurrence.

11) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| > 1$.

12) $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \dfrac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \dfrac{r}{qn+r} - \dfrac{r}{qn+r+1}$.

$S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{qn+1} + \ldots + \dfrac{1}{qn+n} - \dfrac{1}{q+1}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{(N+1)n} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \dfrac{1}{k}\right) = \ln n$.

Exercice 19.
Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 20.
1) $y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$, $y = e^{-x}\sin x + e^{-2x}(cx+d)$.
2) $u_n = \dfrac{(-1)^n e^{-n\pi}(e^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 21.
$\dfrac{\pi^2}{3} - 3$.

Exercice 22.
$\dfrac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = \dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18 - 24\sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} + \dfrac{6}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 18 - 24\ln 2$.

Exercice 23.
$a = -2$, $b = 1$, $S = -\ln 2$.

Exercice 24.
$\tan s_n = n+1$ par récurrence et $s_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k+1} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 2$.

Exercice 25.
1) $\sim \dfrac{a}{n^2}$.
2) $S(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+a) - \arctan k \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2} + \arctan 1 + \arctan\dfrac{1}{2} + \ldots + \arctan\dfrac{1}{n} \Rightarrow S(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 26.
Le déport maximal entre la première pièce et la dernière pour une pile de n pièces est $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2(n-1)}$ (en diamètre d'une pièce). Il dépasse 1 pour $n > 4$.

Exercice 27.
2) Lorsque $k \to \infty$ on a : $\sum_{n=1}^{k} 1/n = \ln(k) + \gamma + o(1)$, d'où $j \leqslant \ln(k_j) + \gamma + o(1) < j + 1/k_j$. Ceci prouve que $\ln(k_j) = j - \gamma + o(1)$ et donc $k_{j+1}/k_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} e$.

Exercice 28.
1) $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2) $\ln(\ln n)$.

Exercice 29.
$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Exercice 30.
2997.

Exercice 31.
$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

Exercice 33.
$T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n+1} - \int_{t=n}^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} < 0$

$S_{n+1} - S_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} - \int_{t=n}^{n+1} \Big(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 34.
$\dfrac{u_{n,k}}{k} = \dfrac{n}{k} - \left[\dfrac{n}{k}\right]$, donc $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{u_{n,k}}{k}$ est une somme de Riemann pour $I = \int_{t=0}^{1}\Bigl(\dfrac{1}{t} - \bigl[\dfrac{1}{t}\bigr]\Bigr)\,\mathrm{d}t$. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \bigl[\dfrac{1}{t}\bigr]$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$, donc $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.

Calcul de I : $I_n = \int_{t=1/n}^{1}\Bigl(\dfrac{1}{t} - \bigl[\dfrac{1}{t}\bigr]\Bigr)\,\mathrm{d}t = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\int_{t=1/k+1}^{1/k} k\,\mathrm{d}t = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\gamma = I$.

Exercice 35.
1) Comparaison série-intégrale : $u_n \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$.

2) Comparaison série-intégrale encore (v_n est la somme des aires entre les rectangles aux points entiers et la courbe de $t \to \ln(t)/t$).

3) $v_n - \ell = -\sum_{k=n}^{\infty}\Bigl(\int_{t=k}^{k+1}\dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \dfrac{\ln(k+1)}{k+1}\Bigr) = -\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ avec $w_k \sim \dfrac{\ln k}{2k^2}$.

Donc $v_n - \ell \sim -\int_{t=n}^{+\infty}\dfrac{\ln t}{2t^2}\,\mathrm{d}t \sim -\dfrac{\ln n}{2n}$.

Exercice 36.
$\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^2-k^2} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\Bigl(\dfrac{1}{n-k} + \dfrac{1}{n+k}\Bigr) = \dfrac{1}{2n}\Bigl(\sum_{k=1}^{2n-1}\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n}\Bigr) \sim \dfrac{\ln n}{2n}$.

Exercice 37.
5) $S_n + \dfrac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S \leqslant S_n + \dfrac{1}{\ln n}$. Pour $n = 60$: $2.06857 < S < 2.06956$.

Exercice 39.
Si $u_n \to 0$, alors $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Exercice 40.
2) $\dfrac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice 41.
On remarque déjà que $\sum u_i$ diverge car $u_n \sim \dfrac{U_n}{n\alpha} \geqslant \dfrac{U_1}{n\alpha}$. On calcule $\sum_{k=0}^{n} ku_k$ par parties :

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Comme $U_n \sim \alpha n u_n$, terme général strictement positif d'une série divergente, on a $\sum_{k=0}^{n} U_k \sim \alpha\sum_{k=0}^{n} ku_k$ d'où : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim nU_n$ et :

$$\frac{1}{n^2u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Exercice 42.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} ku_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 43.
3) $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$ avec $u_k = \dfrac{r^k}{1-r}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{r^k}{1-r} = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

De même, $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} kr^k = \dfrac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^{\infty}\dfrac{r^k}{1-r} = \dfrac{nr^n}{1-r} + \dfrac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.

$k^2r^k = k(S_k - S_{k+1})$ et (S_k) décroît d'où
$\sum_{k=1}^{\infty} k^2r^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\dfrac{kr^k}{1-r} + \dfrac{r^{k+1}}{(1-r)^2}\Bigr) = \dfrac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Exercice 44.

2) $p_n = \dfrac{u_0}{S_n} \to 0$ donc la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Exercice 45.

Méthode des rectangles : $\sum_{k=0}^n \dfrac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geqslant \int_{t=a_{n+1}}^{a_0} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $a_k \sim a_{k+1}$ la série donnée diverge donc. Sinon, elle diverge aussi car son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 46.

$\sum_{n=1}^n v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leqslant k} \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leqslant \sum_{n=1}^n v_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{2N-1} u_k$.

Exercice 47.

$\sum_{k=1}^n v_k + nv_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi (SP majorées) et $nv_n \to \ell \Rightarrow \ell = 0$.
Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge, alors $nv_n \to +\infty$, contradiction.

Exercice 48.

$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n ku_k \sum_{p=k}^n \dfrac{1}{p^2} \leqslant \sum_{k=1}^n \dfrac{ku_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Exercice 49.

$\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{k=0}^n v_k$.

Exercice 50.

Pour $n > 2$, $u_{n+1} < \dfrac{1}{n}$ donc $u_{n+2} > \dfrac{1}{(n+1)e^{1/n}} \sim \dfrac{1}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 53.

2) $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \dfrac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1 > 0, v_n \to +\infty \\ \text{si } a-b+1 = 0, v_n = \text{cste} \\ \text{si } a-b+1 < 0, v_n \to 0. \end{cases}$

3) $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1} + (b-a-1)\sum_{k=1}^n u_k - au_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty u_k = \dfrac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Exercice 54.

La suite (u_n) est croissante donc tend vers $\ell \in]0, +\infty]$. On a ℓ fini si et seulement si la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n) = \sum \dfrac{1}{n^a u_n}$ est convergente, soit si et seulement si $a > 1$.

Pour $a < 1$ on a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \dfrac{2}{n^a} + o\Big(\dfrac{2}{n^a}\Big)$ donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim \dfrac{2}{n^a}$ et $u_n \sim \sqrt{\dfrac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (sommation des relations de comparaison).
Pour $a = 1$ on a de même $u_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

Exercice 55.

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv et vaut $\zeta(\alpha)^2$.
$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{2N} u_n \geqslant \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Exercice 57.

$\dfrac{a}{(1-a)^2}$ et $\dfrac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Exercice 59.

1) Césaro.
2) $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 2(u_0 + u_1 + \ldots + u_n) - v_n$.

Exercice 60.

$|a_n| \leqslant M \Rightarrow \left|\sum_{n=2}^\infty \dfrac{a_n}{n^p}\right| \leqslant M\sum_{n=2}^\infty \dfrac{1}{n^p} \leqslant M\int_{t=1}^\infty \dfrac{\mathrm{d}t}{t^p} = \dfrac{M}{p-1} \Rightarrow a_1 = 0$.

Exercice 61.

Démonstration pour x_1 : $\sum x_n = 0$, $\sum x_{2n} = 0 \Rightarrow \sum_{n\text{ impair}} x_n = 0$. On retire les multiples impairs de 3 $(\sum x_{3n} - \sum x_{6n} = 0) \Rightarrow \sum_{n\wedge 6=1} x_n = 0$. On retire les multiples restants de $5, 7, \ldots$ On obtient ainsi une suite $(s_p)_{p\text{ premier}}$ nulle qui converge vers x_1, donc $x_1 = 0$.
Peut-on se passer de la convergence absolue ?

Exercice 62.

1) récurrence sur p.

2) Transformation d'Abel et interversion de sommations : $\sum_{n=0}^{p} v_n = \sum_{k=0}^{p} \dfrac{\binom{p+1}{k+1}}{2^p} \sum_{n=0}^{k} u_n$.

Thm de Césaro $\Rightarrow \sum v_n = 2\sum u_n$.

Exercice 63.

1) $nu_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, $nu_{2n+1} \leqslant \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k$.

2) $\varepsilon > 0$: Pour k suffisament grand, $u_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$, donc $u_k \geqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow k \leqslant n\varepsilon$. Alors $\sum_{u_k\geqslant 1/n} \dfrac{1}{u_k} \leqslant n^2\varepsilon + Kn$.

Exercice 64.

1) TAF : $\exists\, x_n \in [R_{n+1}, R_n]$ tq $R_n^{1-p} - R_{n+1}^{1-p} = (1-p)\dfrac{R_n - R_{n+1}}{x_n^p} \geqslant (1-p)\dfrac{a_n}{R_n^p}$. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p} \leqslant \dfrac{A^{1-p}}{1-p}$.

2) C'est $\dfrac{1}{1-p}$: Pour $a_n = k^n$, $A^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^p} = \dfrac{1-k}{1-k^{1-p}} \underset{k\to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-p}$.

Exercice 65.

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées.
Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \leqslant \dfrac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exercice 70.

Transformaton d'Abel.

Exercice 71.

Transformation d'Abel + découpage, $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 72.

$|u_n| + |v_n| \leq (|u_1| + |v_1|)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{k(k+1)}\right)$ et le produit infini est trivialement convergent.

Exercice 73.

2) a) $1 + S_N \leqslant P_N$ n'est plus triviale mais reste vraie par récurrence (la différence est une fonction décroissante de a_1).

3) La suite $(P_N e^{-S_N})$ est positive décroissante donc converge, ce qui entraîne la convergence de (P_N).

On a $P_N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi $P_N e^{-S_N} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi la série de terme général $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\dfrac{a_n^2}{2}$ diverge.

4) a) Démontrer l'inégalité en développant les deux membres. Sachant que la suite (P_N) est bornée on en déduit qu'elle est de Cauchy donc converge.

Exercice 74.

On a $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Soit $a \in [0, 1[$ et M_a, m_a le maximum et le minimum de f sur $[0, a]$. D'après la relation précédente, $m_a \geqslant m_{a^2}$ et $M_a \leqslant M_{a^2}$ donc en fait $m_a = m_{a^2}$ et $M_a = M_{a^2}$.
On en déduit $f([0, a]) = f([0, a^2]) = \ldots = f([0, a^{2^k}]) = \ldots = \{f(0)\}$. Donc f est constante et réciproquement les fonctions constantes conviennent.

Exercice 75.

Soit $(p_0, p_1, \ldots)$ la suite croissante des nombres premiers et $S_k = \sum_{P(n)\leqslant k} \dfrac{1}{n}$.

On a $S_k = S_{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{p_k^i} = \dfrac{p_k}{p_k - 1} S_{k-1}$, ce qui prouve que S_k est fini.

La série demandée est $\dfrac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{S_k - S_{k-1}}{p_k} = \dfrac{S_0}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{S_k}{p_k^2}$.

Montrons que $S_k \leq 2\sqrt{p_k}$, ceci prouvera la convergence. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$, et si c'est vrai pour $k - 1$ avec $k \geqslant 2$ alors on obtient $S_k \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\dfrac{p_k p_{k-1}}{(p_k - 1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\dfrac{p_k(p_k - 2)}{(p_k - 1)^2}} \leqslant 2\sqrt{p_k}$.

Remarque : on a en réalité $S_k \sim e^\gamma \ln(p_k)$ où γ est la constante d'Euler (formule de Mertens).

Exercice 76.

$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \Rightarrow \cos z \in [-1, 1]$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 77.

Mettre $1 + \dfrac{z}{n}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 78.

Développement en série.

Exercice 79.

$\left|\dfrac{e^z - 1}{z}\right|^2 = \dfrac{e^{2x} + 1 - 2e^x \cos y}{x^2 + y^2}$.

Après simplifications, on est ramené à prouver que $x^2(1 - \cos y) \leqslant y^2(\operatorname{ch} x - 1)$, ce qui est vrai car on peut caser $\frac{1}{2}x^2y^2$ entre les deux. Il y a égalité si et seulement si $y = 0$.

Exercice 81.

$e^{x+iy} = x + iy \Leftrightarrow x = y/\tan y$, $e^{-y/\tan y} = \sin y/y$. Au voisinage de $2k\pi^+$, $e^{-y/\tan y} < \sin y/y$ (point plat) et au voisinage de $(2k+1)\pi^-$, $e^{-y/\tan y} > \sin y/y$ (limite infinie).

Exercice 82.

1) $z \equiv \pm i \ln(2 + \sqrt{3}) \pmod{2\pi}$.

2) $z \equiv i\pi \pmod{2i\pi}$.

3) $z \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou $z \equiv 0 \pmod{2j\pi}$ ou $z \equiv 0 \pmod{2j^2\pi}$.

4) $\Leftrightarrow 6e^{2iz} - (7 + 5i)e^{iz} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1 + i & : \quad z \equiv \pi/4 - i \ln \sqrt{2} \pmod{2\pi} \\ e^{iz} = (1 - i)/6 : & \quad z \equiv -\pi/4 - i \ln(\sqrt{2}/6) \pmod{2\pi}. \end{cases}$

Exercice 83.

$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x \Rightarrow \sup = \operatorname{ch} 1$.

$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$. à x fixé, le module augmente avec $|y|$, donc le maximum est atteint au bord du disque.

$\varphi(\theta) = \sin^2 \cos\theta + \operatorname{sh}^2 \sin\theta \Rightarrow \varphi'(\theta) = \sin 2\theta \left(\dfrac{\operatorname{sh}(2\sin\theta)}{2\sin\theta} - \dfrac{\sin(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right) \Rightarrow \sup = \operatorname{sh} 1$.

Exercice 85.

Si x est vecteur propre de M il l'est aussi de $\exp(M)$ donc $x = ke_1$ et la valeur propre associée est $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^\alpha = 2i$ ($\alpha = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$). On a donc $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\exp(M) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha\beta \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$ d'où $\beta = \dfrac{1 - i}{2}$.

Exercice 87.

1) En Maple :

```
u := proc (n) local i;
  i := n; while i > 0 and (i mod 10) <> 9 do i := iquo(i, 10) end do;
  if i > 0 then 0 else 1/n end if
end proc
```

2) On a dans $[0,+\infty[$: $\sum_{k=10}^{\infty} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in A_n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{card}(A_n)/10^n = \sum_{n=1}^{\infty} 8 \times (\frac{9}{10})^n = 72$. Les entiers de A_n ont un chiffre de tête compris entre 1 et 8 et les n chiffres suivants compris entre 0 et 9, d'où $\mathrm{card}(A_n) = 8 \times 9^n$. Le dernier majorant étant fini, la série converge.

3) a) L'application : $\begin{cases} A_n \times [\![0,8]\!] & \longrightarrow & A_{n+1} \\ (k,\ell) & \longmapsto & 10k+\ell \end{cases}$ est bijective.

b) Pour $(k,\ell) \in A_n \times [\![0,8]\!]$ on a

$$\frac{u_k}{10} = u_{10k} \geqslant u_{10k+\ell} \geqslant u_{10k+8} = \frac{u_{10k}}{1+8/10k} \geqslant \frac{u_k}{10} \times \frac{1}{1+8/10^{n+1}}.$$

En sommant sur k,ℓ, on obtient $\frac{9}{10}T_n \times \dfrac{1}{1+8/10^{n+1}} \leqslant T_{n+1} \leqslant \frac{9}{10}T_n$ ce qui donne l'encadrement demandé sachant que $1 - 8/10^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1+8/10^{n+1}}$.

c) $(\frac{9}{10} - \frac{36}{1000}) \sum_{n=1}^{\infty} T_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{9}{10} - \frac{36}{10^{n+2}}) T_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} \leqslant \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} T_n$.

On en déduit $(\frac{9}{10} - \frac{36}{1000})(S - S_9) \leqslant S - S_{99} \leqslant \frac{9}{10}(S - S_9)$, soit $\dfrac{1000S_{99} - 864S_9}{136} \leqslant S \leqslant 10S_{99} - 9S_9$.

Numériquement, $17 \leqslant S \leqslant 46\ldots$

Mieux en sommant à partif de $n = 2$: $(\frac{9}{10} - \frac{36}{10000})(S - S_{99}) \leqslant S - S_{999} \leqslant \frac{9}{10}(S - S_{99})$, soit $\dfrac{10000S_{999} - 8964S_{99}}{1036} \leqslant S \leqslant 10S_{999} - 9S_{99}$. Numériquement, $22.31 \leqslant S \leqslant 22.96$.