# Variables aléatoires

**Exercice 1.** *Variables aléatoires entières*

**1)** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

**a)** Montrer que $X$ a une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X \geqslant k)$ est convergente et que dans ce cas, $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série.

**b)** Établir une formule analogue pour $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et $\sum_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}(X \geqslant k)$.

**2)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et de même loi. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

**a)** Calculer $\mathbb{P}(M_n \leqslant k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k)$.

**b)** On suppose que la loi de $X_1$ est la loi uniforme sur $[\![1, K]\!]$ avec $K \geqslant 2$ fixé. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(M_n)$.

**c)** On suppose que la loi de $X_1$ est la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$. Déterminer la loi de $m_2 = \min(X_1, X_2)$, son espérance, et en déduire $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$.

**Exercice 2.** *Loi de Poisson*

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**1)** Donner la loi de $X^2 + 1$).

**2)** Calculer $\mathbb{P}(2X < X^2 + 1)$.

**3)** Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$.

**4)** Soit $Y$ une variable aléatoire sur le même espace probabilisé, indépendante de $X$, prenant les valeurs 1 et 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}(XY \text{ est pair})$.

**Exercice 3.** *Loi de Poisson et loi géométrique*

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé, indépendantes, avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

**Exercice 4.** *Urne de Polya*

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire au hasard une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et on y ajoute une nouvelle boule de cette même couleur. On tire à nouveau au hasard une boule, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec une nouvelle boule de cette même couleur, et ainsi de suite. Les tirages successifs sont supposés mutuellement indépendants. Soit $X_n$ le nombre de boules blanches tirées au cours de $n$ premiers tirages. Déterminer la loi de $X_n$.

**Exercice 5.** *Urne de Polya*

Un sac contient deux pièces de 1 euro et une pièce d'or (indiscernable des autres au toucher). Vous pouvez tirer dans ce sac jusqu'à l'obtention de la pièce d'or selon les règles suivantes:

- avant chaque tirage, vous ajoutez deux pièces de 1 euro dans le sac;
- à chaque tirage, vous tirez *une* pièce et vous la gardez.

Soit $X$ le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la pièce d'or ($X = +\infty$ si vous ne l'obtenez jamais).

**1)** Quelle est la loi de $X$? A-t-elle une espérance? Si oui, la calculer.

**2)** La pièce d'or vaut $\alpha$ euros ($\alpha \in [\![2, +\infty[\![$). Quelle est la probabilité que vous gagniez de l'argent?

**Exercice 6.** *Dés non équilibrés*

On lance indépendament deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note $S$ la somme des faces indiquées. Montrer que, même si les dés sont non équilibrés et différents, il n'est pas possible que $S$ suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On pourra considérer les fonctions génératrices associées aux dés.

**Exercice 7.** *Permutation aléatoire*

Un sac contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$. On tire indépendament et avec remise des jetons jusqu'à ce que chaque numéro soit sorti au moins une fois. Soient $N$ le nombre (aléatoire) de jetons tirés et $S$ la liste des numéros, sans répétition, dans l'ordre où ils ont été tirés.

**1)** Prouver que $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.

**2)** On note $N_1$ le nombre de jetons tirés avant de tirer un jeton différent du premier, $N_2$ le nombre de jetons supplémentaires tirés avant de tirer un jeton différent des deux premiers, etc. Déterminer les lois de $N_1, N_2, \ldots$ et en déduire $\mathbb{E}(N)$.

**3)** Prouver que $S$ est uniformément distribuée sur l'ensemble des permuations $S_n$.

**Exercice 8.** *Couple de variables aléatoires*

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de $(X, Y)$ vérifie : $\mathbb{P}(X = j, Y = k) = a(j + k)/2^{j+k}$.

**1)** Quelle est la valeur de $a$ ?

**2)** Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.

**3)** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4)** Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

**Exercice 9.** *Variables indépendantes*

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et de même loi, ayant une espérance. On se propose de prouver : $\mathbb{E}(|X + Y|) \geqslant \mathbb{E}(|X|)$.

**1)** Traiter le cas particulier où $X$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

**2)** Dans le cas général, on note $a = \sum_{x\geqslant 0} x\mathbb{P}(X = x)$, $b = \sum_{x<0} |x|\mathbb{P}(X = x)$, $p = \mathbb{P}(X \geqslant 0)$ et $q = \mathbb{P}(X < 0) = 1 - p$.

  **a)** En remarquant que $|x + y| \geqslant |x| - |y|$ quand $x$ et $y$ sont deux réels de signes contraires, montrer que $\mathbb{E}(|X + Y|) \geqslant 2(ap + bq) + 2|aq - bp|$.

  **b)** Déterminer la valeur minimale de ce minorant à $a, b$ fixés quand $p$ décrit $[0, 1]$ et conclure.

**3)** Donner un cas où l'on a $\mathbb{E}(|X + Y|) < \mathbb{E}(|X|)$ avec $X, Y$ non indépendantes mais de même loi et un cas avec $X, Y$ indépendantes mais de lois différentes.

**Exercice 10.** *Variables indépendantes*

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires complexes discrètes indépendantes et de même loi, ayant une espérance. On se propose de prouver : $\mathbb{E}(|X + Y|) \geqslant \mathbb{E}(|X - Y|)$.

**1)** Justifier : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| - |x - y| = 2\min(|x|, |y|)\operatorname{sgn}(xy)$ et $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\int_{\theta=0}^{2\pi} |\Re(ze^{-i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = 4|z|$.

**2)** Traiter le cas où $X, Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On utilisera les variables aléatoires $X^+ = \max(X, 0)$, $X^- = \max(-X, 0)$, et $Y^+, Y^-$ définies de manière analogue pour $Y$.

**3)** Traiter le cas où $X, Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On utilisera les variables aléatoires $X_n = \lfloor nX \rfloor$, $Y_n = \lfloor nY \rfloor$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

**4)** Traiter le cas où $X, Y$ sont à valeurs complexes.

**Exercice 11.** *Nombre aléatoire de lancers*

On dispose d'une pièce ayant la probabilité $p \in \,]0, 1[$ de donner pile et on réalise l'expérience suivante :

– on lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir pile. Soit $N$ le nombre de lancers effectués.

– on lance à nouveau la pièce $N$ fois et on compte le nombre $X$ de pile obtenus.

**1)** Quelle est la loi de $N$ ?

**2)** Quelle est la loi de $X$ ?

**3)** Calculer $\mathbb{E}(X)$.

**Exercice 12.** *Formule de Wald*

Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $N$ des variables aléatoires sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, les $X_i$ ayant toutes même loi. On considère $S = X_1 + \ldots + X_N$ (somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, avec la convention $S = 0$ si $N = 0$).

**1)** Montrer que $S$ est une variable aléatoire et déterminer sa fonction génératrice en fonction des fonctions génératrices de $N$ et $X_1$.

**2)** En déduire $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$ avec la convention $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.

**Exercice 13.** *Séries dans je jeu de pile ou face infini*

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in ]0,1[$ de donner pile, les lancers étant mutuellement indépendants. Si $\omega \in \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, on décompose $w$ en sous-suites de résultats consécutifs identiques, appelés *séries,* le résultat changeant d'une série à la suivante et on note $L_1(\omega), L_2(\omega), \ldots$ les longueurs de ces séries. Par exemple, si $\omega = FFFPFPPPPFP\ldots$, on a $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 1$, $L_3(\omega) = 1$, $L_4(\omega) = 4$, $L_5(\omega) = 1$.

Les fonctions $L_1, L_2, \ldots$ sont bien définies sur le sous-ensemble $\Omega'$ de $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites comportant une infinité de $P$ et une infinité de $F$.

**1)** Prouver que $\Omega'$ est un évènement et que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$.
Dans la suite de l'exercice, on se place dans l'espace probabilisé constitué de $\Omega'$, des évènements inclus dans $\Omega'$ et de la restriction de $\mathbb{P}$ à ces évènements. On admet que $L_1, L_2, \ldots$ sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

**2)** Déterminer la loi de $L_1$ et son espérance.

**3)** Déterminer la loi conjointe de $(L_1, L_2)$. En déduire la loi de $L_2$ et son espérance.

**4)** Expliquer pourquoi $L_1$ et $L_2$ n'ont pas même loi. $L_1, L_2$ sont-elles indépendantes ?

**5)** Montrer que $L_3$ a même loi que $L_1$, et que $L_1, L_3$ ne sont pas indépendantes si $p \neq \frac{1}{2}$.

**Exercice 14.** *Temps d'attente*

Au jeu de pile ou face infini avec une pièce équilibrée, on considère les variables aléatoires $T_{XY}$ = nombre de lancers jusqu'à obtenir la séquence $XY$ où $X, Y \in \{P,F\}$.

**1)** Déterminer les lois et les espérances de $T_{PP}, T_{PF}, T_{FP}, T_{FF}$.

**2)** Calculer $\mathbb{P}(T_{PP} > T_{PF})$ et $\mathbb{P}(T_{PP} > T_{FP})$.

**3)** Déterminer les lois de $T_{PPF}$ et $T_{FPP}$ en fonction de la loi de $T_{PP}$ et leurs espérances.

**4)** Calculer $\mathbb{P}(T_{PPF} > T_{FPP})$.

**Exercice 15.** *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$*

On considère une particule se déplaçant au hasard dans un plan de la manière suivante :
– le temps est discret ;
– à l'instant $n$, la particule tire une direction au hasard parmi Nord, Sud, Est, Ouest avec probabilité $\frac{1}{4}$ pour chaque direction puis effectue un pas dans cette direction ;
– les tirages sont mutuellement indépendants.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il est presque sûr que la particule passera une infinité de fois par son point de départ. On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ la position de la particule à l'instant $n$ dans le repère (position de départ,Est,Nord) et $N$ le nombre d'instants $n \geqslant 1$ tels que $Z_n = (0,0)$. $N$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et il s'agit de prouver que $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$.

**1)** Montrer que $\mathbb{P}(N \geqslant 2) = \mathbb{P}(N \geqslant 1)^2$ puis généraliser.

**2)** En déduire qu'il suffit de prouver que la série $\sum_k \mathbb{P}(N \geqslant k)$ est divergente.

**3)** Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = (0,0))$ sous forme d'une somme de coefficients binomiaux.

**4)** Montrer pour $k, m, n \in \mathbb{N}$ : $\sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.

**5)** En déduire une expression simple pour $\mathbb{P}(Z_{2n} = (0,0))$ et un équivalent lorsque $n \to \infty$. La série $\sum_n \mathbb{P}(Z_{2n} = (0,0))$ est-elle convergente ?

**6)** Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé soit $N_p$ la variable aléatoire valant 1 si $Z_p = (0,0)$ et 0 sinon.
Montrer que $\mathbb{E}(N_0 + \ldots + N_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

**7)** Conclure.

**Exercice 16.** *Association de parieurs (Centrale MP 2015)*

Dans l'énoncé, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $N$ un entier naturel non nul.

Un jeu oppose $n$ joueurs notés $J_1, \dots, J_n$. Le jeu consiste à lancer $N$ fois une pièce équilibrée. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour les lancers. Les gagnants sont les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes : ils se partagent alors la somme de $S$ euros.

Dans la suite, on abrégera pile en $P$ et face en $F$. Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent $PPF$, le joueur ayant prédit $PFP$ aura une prévision correcte (l'ordre compte). Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_i$ le nombre de prévisions correctes du joueur $J_i$ et $G_i$ son gain.

**1)** Dans cette question, on suppose que les joueurs choisissent leur prédiction au hasard indépendamment les uns des autres. On admet que dans ces conditions, les variables aléatoires $X_i$ sont mutuellement indépendantes et de même loi.
- **a)** Justifier que les variables $G_i$ ont même loi. On ne demande pas de déterminer explicitement cette loi.
- **b)** Justifier que l'espérance de $G_i$ est $S/n$ pour tout $i$.
- **c)** Vérifier expérimentalement ce fait à l'aide d'une simulation en Python.

**2)** Dans cette question, on suppose que les joueurs $J_1, J_3, \dots, J_n$ choisissent leur prédiction au hasard indépendamment les uns des autres et le joueur $J_2$ choisit les prévisions contraires de celles de $J_1$. Par exemple, si $N = 3$ et $J_1$ choisit $PFP$ alors $J_2$ choisit $FPF$. On admet qu'alors les variables aléatoires $X_1, X_3, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de même que les variables $X_2, X_3, \dots, X_n$. A l'issue du jeu, les joueurs $J_1$ et $J_2$ se partagent leurs gains éventuels. On pose $G' = G_1 + G_2$ et $Y = \max(X_1, X_2)$. On suppose enfin que $N$ est impair : $N = 2p + 1$.
- **a)** Montrer que les $X_i$ suivent toutes la même loi que l'on précisera. Dans la suite, on notera $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $\tau_k = \mathbb{P}(X_i \leqslant k)$.
- **b)** Préciser l'ensemble $V$ des valeurs prises par $Y$.
- **c)** Soient $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \in V$. Calculer $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k)$ en fonction de $q_k$ et $\tau_{k-1}$.
- **d)** En déduire $\mathbb{E}(G'), \mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie adoptée par $J_1$ et $J_2$ est-elle avantageuse ?

**3)** Reprendre le modèle de la question précédente en supposant $N$ pair : $N = 2p$. On vérifiera qu'alors $\mathbb{E}(G') = \dfrac{2S}{n-1}\left(1 - \dfrac{\tau_p^n}{nq_p} + \dfrac{\tau_{p-1}^n}{nq_p}\right)$. La stratégie adoptée par $J_1$ et $J_2$ est-elle avantageuse ?

**Exercice 17.** *Covariance*

**1)** Soient $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \frac{1}{4}$ et déterminer les cas d'égalité.

**2)** Soient deux évènements $A, B$ d'un même espace probabilisé. Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$ et déterminer les cas d'égalité.

**Exercice 18.** *Borel-Cantelli, Centrale 2015*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n) < +\infty$.

**1)** Soit $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}$. Montrer que $Z$ est une variable aléatoire discrète.

**2)** Soit $F = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega \text{ appartient à un nombre fini de } E_n\}$. Montrer que $F$ est un évènement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.

**3)** Montrer que $Z$ admet une espérance.

**Exercice 19.** *Beppo Levi*

**1)** Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives. En considérant $Y = \lceil X \rceil$, montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

**2)** Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives sur un même espace probabilisé $(\Omega, \top, \mathbb{P})$. On suppose : $\forall\, \omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ tend vers 0 en décroissant et $\mathbb{E}(X_0) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**3)** Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives sur un même espace probabilisé $(\Omega, \top, \mathbb{P})$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega)$ converge vers un réel noté $X(\omega)$. On suppose aussi que $X$ est une variable aléatoire discrète (réelle positive). Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$. *Attention, ce résultat (bien utile dans certains exercices d'oral) est hors programme !*

**Exercice 20.** *Loi décomposable*

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que $X$ est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes $Y$ et $Z$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement constantes telles que $Y + Z$ ait même loi que $X$.

**1)** Si $X$ est décomposable, donner une relation entre $G_X, G_Y, G_Z$.

**2)** Soient $n \geqslant 2$ et $p \in ]0, 1[$. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, montrer que $X$ est décomposable.

**3)** Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que $X$ suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \left(\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right) \times \left(\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1} t^{ri}\right)$. En déduire que $X$ est décomposable.

**4)** On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit $X$ suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$. Montrer que $X$ n'est pas décomposable.

**Exercice 21.** *CCP 2017*

On considère un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{(i+j)e^{i+j-1}}{2e^{2e} i!\, j!}.$$

**1)** Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.

**2)** X et Y sont elles indépendantes ?

**3)** Montrer que $\mathbb{E}(2^{X+Y})$ existe et donner sa valeur.

**Exercice 22.** *Centrale 2017*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$.

**1)** **a)** Déterminez la loi de $S_n$.

**b)** Majorez $u : t \mapsto \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant t\sqrt{n})$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On nomme $\varphi$ cette majoration. Tracer à l'aide de Python sur un même graphe $u$ et $\varphi$ pour $n = 100$ et $p = 0.25$. Que constatez-vous ?

**2)** Soient $s \geqslant 0$, $c < 0 < d$ et $y \in [c, d]$.

**a)** Montrez que $e^{sy} \leqslant \dfrac{d-y}{d-c}e^{sc} + \dfrac{y-c}{d-c}e^{sd}$.

**b)** Montrez que $\ln\left(\dfrac{d}{d-c}e^{sc} - \dfrac{c}{d-c}e^{sd}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$.

**c)** On considère une variable aléatoire discrète $Y$ centrée à valeurs dans l'intervalle $[c, d]$. Montrez que $\mathbb{E}(e^{sY}) \leqslant \exp(\frac{s^2(d-c)^2}{8})$.

**solutions**

**Exercice 1.**

**1)** a) $\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=0}^{N-1}k\mathbb{P}(X=k)=N\mathbb{P}(X\geqslant N)=\sum_{k=N}^{\infty}N\mathbb{P}(X=k)$.

b) $\sum_{k=1}^{N}2k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=0}^{N-1}k^2\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{P}(X\geqslant k)+(N^2+1)\mathbb{P}(X\geqslant N)$
donc en supposant que $\mathbb{E}(X)$ est finie, on obtient que $\mathbb{E}(X^2)$ est finie si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X\geqslant k)$ converge et dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X)=2\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geqslant k)-\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geqslant k)\Big)^2.$$

**2)** a) $\mathbb{P}(M_n\leqslant k)=\mathbb{P}(X_1\leqslant k)^n$.

b) $\mathbb{E}(M_n)=\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(M_n\geqslant k)=K-\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(M_n<k)=K-\sum_{k=1}^{K-1}(k/K)^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}K$.

c)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n)&=\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-(1-p)^{k-1})^n)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(-1)^{\ell+1}(1-p)^{(k-1)\ell}\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n}{\ell}(-1)^{\ell+1}(1-p)^{(k-1)\ell}\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{(-1)^{\ell+1}}{1-(1-p)^{\ell}}\quad\text{(non simplifiable).}\end{aligned}$$

$m_2$ suit la loi $\mathcal{G}(2p-p^2)$ donc $\mathbb{E}(m_2)=\dfrac{1}{2p-p^2}$
et $\mathbb{E}(|X_1-X_2|)=\mathbb{E}(M_2-m_2)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{1}{1-(1-p)^2}-\dfrac{1}{2p-p^2}=\dfrac{2-2p}{2p-p^2}$.

**Exercice 2.**

**1)** $\mathbb{P}(X^2+1=k)=e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ si $k=n^2+1$ et $\mathbb{P}(X^2+1)=0$ si $k$ n'est pas de cette forme.
**2)** $\mathbb{P}(2X<X^2+1)=\mathbb{P}(X\neq 1)=1-\lambda e^{-\lambda}$.
**3)** $\mathbb{P}(X \text{ est pair})=e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$.
**4)** $\mathbb{P}(XY \text{ est pair})=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X\text{ est pair})+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(3+e^{-2\lambda})$.

**Exercice 3.**

$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}p(1-p)^{k-1}=\dfrac{p}{1-p}(e^{-\lambda p}-e^{-\lambda})$.

**Exercice 4.**

$\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}((n-k)\mathbb{P}(X_{n-1}=k)+k\mathbb{P}(X_{n-1}=k-1))$. Par récurrence sur $n$, $\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{1}{n+1}$ pour $k\in[\![0,n]\!]$.

**Exercice 5.**

**1)** $\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(X=r)=\mathbb{P}(X=r|X>r-1)\mathbb{P}(X>r-1)=\dfrac{1}{r+4}\displaystyle\prod_{k=2}^{r}\frac{k+2}{k+3}=\frac{4}{(r+3)(r+4)}$.
La série diverge, il n'y a pas d'espérance.
**2)** la probabilité de gagner de l'argent est égale à $\mathbb{P}(X\leqslant\alpha-1)=\sum_{r=1}^{\alpha-1}4(\dfrac{1}{r+3}-\dfrac{1}{r+4})=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+3}\underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow}1$

**Exercice 6.**

Si $G,H$ sont les fonctions génératrices, on doit avoir $G(x)H(x)=x^2(1+\ldots+x^{10})/11$. $G(x)/x$ est un polynôme à coefficients réels de degré 5 ; il admet une racine réelle alors que le polynôme $1+x+\ldots+x^{10}$ n'en n'a pas.

**Exercice 7.**

**1)** La probabilité que le jeton $j$ ne soit pas tiré au cours des $k$ premiers tirages est $(1-1/n)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En conditionnant par $j$ on obtient $\mathbb{P}(N=\infty)=0$.

**2)** $\mathbb{P}(N_i=k)=(i/n)^{k-1}(1-i/n)$, $\mathbb{E}(N_i)=n/(n-i)$ et $\mathbb{E}(N)=\mathbb{E}(N_1)+\ldots+\mathbb{E}(N_{n-1})=nH_{n-1}$.

**3)** Pour $\sigma\in S_n$, on a $\mathbb{P}(S=\sigma \mid N_1=k_1,\ldots,N_{n-1}=k_{n-1})=1^{k_1-1}2^{k_2-1}\ldots(n-1)^{k_{n-1}-1}/n^{k_1+\ldots+k_{n-1}}$ est indépendant de $\sigma$.

**Exercice 8.**

**1)** $\frac{1}{8}$.

**2)** $\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{P}(Y=j)=(j+1)/2^{j+2}$.

**3)** Non.

**4)** 3.

**Exercice 9.**

**1)** Soient $p=\mathbb{P}(X=1)$ et $q=\mathbb{P}(X=-1)=1-p$.
On a $\mathbb{E}(|X+Y|)-\mathbb{E}(|X|)=2p^2+2q^2-1=2p^2+2q^2-(p+q)^2=(p-q)^2\geqslant 0$.

**2) a)**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X+Y|)&=\sum_{x\geqslant 0,y\geqslant 0}|x+y|\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\&+\sum_{x\geqslant 0,y<0}|x+y|\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\&+\sum_{x<0,y\geqslant 0}|x+y|\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\&+\sum_{x<0,y<0}|x+y|\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\&=A+B+C+D.\end{aligned}$$

$A=\sum_{x\geqslant 0,y\geqslant 0}x\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)+\sum_{x\geqslant 0,y\geqslant 0}y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)=2ap$.
$D=2bq$ et $B=C\geqslant aq-bp$ (calculs analogues).

D'où $\mathbb{E}(|X+Y|)\geqslant 2(ap+bq)+2(aq-bp)$. Si $aq-bp\geqslant 0$ c'est bon. Sinon, on obtient $bp-aq$ en utilisant $|x+y|\geqslant |y|-|x|$.

**b)** Pour $a=b=0$, le minorant est constamment nul et dans ce cas, $\mathbb{E}(|X|)=a+b=0$.
Pour $a+b>0$, le plus petit minorant est $(2a^2+2b^2)/(a+b)\geqslant a+b=\mathbb{E}(|X|)$, atteint pour $p=a/(a+b)$.

**3)** Pour $X,Y$ dépendantes, prendre $Y=-X$ avec $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$.
Pour $X,Y$ indépendantes de lois distinctes, prendre $X=1$, $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{2}{3}$.

**Exercice 10.**

**2)** $\min(|X|,|Y|)\operatorname{sgn}(XY) = \min(X^+,Y^+) + \min(X^-,Y^-) - \min(X^+,Y^-) - \min(X^-,Y^+)$ ;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\min(X^+,Y^+)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\min(X^+,Y^+) > n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X^+ > n, Y^+ > n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X^+ > n)\mathbb{P}(Y^+ > n)\end{aligned}$$

et de même pour les autres espérances. Il vient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(|X+Y|) - \mathbb{E}(|X-Y[)\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{P}(X^+ > n)\mathbb{P}(Y^+ > n) + \mathbb{P}(X^- > n)\mathbb{P}(Y^- > n)\\ &\qquad - \mathbb{P}(X^+ > n)\mathbb{P}(Y^- > n) - \mathbb{P}(X^- > n)\mathbb{P}(Y^+ > n))\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{P}(X^+ > n) - \mathbb{P}(X^- > n))(\mathbb{P}(Y^+ > n) - \mathbb{P}(Y^- > n))\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{P}(X^+ > n) - \mathbb{P}(X^- > n))^2\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

**3)** $X_n$,$Y_n$ sont à valeurs entières, indépendantes de même loi et ont une espérance car $|X_n| \leqslant n(|X|+1)$ donc $\mathbb{E}(|X_n+Y_n|) \geqslant \mathbb{E}(|X_n-Y_n|)$.
Par ailleurs $\left|\frac{1}{n}|X_n \pm Y_n| - |X \pm Y|\right| \leqslant \frac{2}{n}$, d'où $\mathbb{E}(|X+Y|) \geqslant \mathbb{E}(|X-Y|) - \frac{4}{n}$ et on fait tendre $n$ vers $+\infty$.

**Exercice 11.**

**1)** $\mathbb{P}(N=k) = pq^{k-1}$.

**2)** $\mathbb{P}(X=x \mid N=k) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}$, $\mathbb{P}(X=x) = q^{x-1}/(1+q)^{x+1}$ si $x \geqslant 1$ et $\mathbb{P}(X=0) = q/(1+q)$.

**3)** $\mathbb{E}(X) = 1$.

**Exercice 12.**

**1)** $\{S=k\} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\bigcup_{k_1+\ldots+k_i=k}\{N=i, X_1=k_1,\ldots,X_i=k_i\}$, $G_S(z) = G_N \circ G_{X_1}(z)$.

**2)** Le cas où $N$ et $X_1$ ont des espérances finies est immédiat, de même que le cas où une des deux variables a une espérance nulle.
Si $0 < \mathbb{E}(N) < \infty = \mathbb{E}(X_1)$, pour $K \in \mathbb{N}$ on considère $Y_i = \min(X_i, K)$ et $T = Y_1 + \ldots + Y_N$. On a $X_i \geqslant Y_i$ donc $S \geqslant T$ puis $\mathbb{E}(S) \geqslant \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y_1) \geqslant \mathbb{E}(N)\sum_{k=0}^{K} k\mathbb{P}(X_1=k) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. On traite de manière analogue le cas $0 < \mathbb{E}(X_1) < \infty = \mathbb{E}(N)$.

**Exercice 13.**

1) Soit $P_{m,n}=$« au cours des $n$ premiers lancers, il sort exactement $m$ pile ».
On a $\mathbb{P}(P_{m,n})=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ à $m$ fixé car $q=1-p<1$. Donc la probabilité qu'une suite infinie donne exactement $m$ pile est nulle, et par union dénombrable, la probabilité qu'une suite infinie comporte un nombre fini de pile est elle aussi nulle. Comme $p<1$, on a de même $\mathbb{P}$(il y a un nombre fini de face) $=0$, puis par union, $\mathbb{P}(\overline{\Omega'})=0$.
2) En conditionnant par le résultat du premier tirage, on trouve
$\mathbb{P}(L_1=k)=p^kq+pq^k$, d'où $\mathbb{E}(L_1)=p/q+q/p$.
3) $\mathbb{P}(L_1=k,L_2=\ell)=p^{k+1}q^\ell+p^\ell q^{k+1}$, $\mathbb{P}(L_2=\ell)=p^2q^{\ell-1}+p^{\ell-1}q^2$, $\mathbb{E}(L_2)=2$.
4) $L_2$ est la longueur de la première série d'une suite amputée d'un nombre aléatoire de termes, il n'y a aucune raison pour qu'elle ait même loi que la longueur de la première série d'une suite non amputée (ou amputée d'un nombre fixé de termes).

   $\mathbb{P}(L_1=1,L_2=1)=\mathbb{P}(L_1=1)\mathbb{P}(L_2=1)\Leftrightarrow p=q=\frac{1}{2}$ et lorsque cette condition est réalisée, on constate que la loi conjointe de $(L_1,L_2)$ est bien la loi produit des lois de $L_1$ et $L_2$, identiques dans ce cas.
5) $\mathbb{P}(L_1=i,L_2=j,L_3=k)=p^{i+k}q^{j+1}+p^{j+1}q^{i+k}$, $\mathbb{P}(L_1=i,L_3=k)=p^{i+k-1}q^2+p^2q^{i+k-1}$, $\mathbb{P}(L_3=k)=p^kq+pq^k$.

**Exercice 14.**

1) $\mathbb{P}(T_{PP}=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{PP}=k-1)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(T_{PP}=k-2)$ pour $k\geqslant 3$,
$\mathbb{P}(T_{PP}=k)=\frac{1}{2\sqrt{5}}((\frac{\sqrt{5}+1}{4})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{4})^{k-1})$, $\mathbb{E}(T_{PP})=6$.

   $\mathbb{P}(T_{PF}=k)=(k-1)/2^k$, $\mathbb{E}(T_{PF})=4$.
2) $\mathbb{P}(T_{PP}<T_{PF})=\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{\infty}F^iPP)=\frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(T_{PP}>T_{PF})=\frac{1}{2}$.
$\mathbb{P}(T_{PP}<T_{FP})=\mathbb{P}(PP)=\frac{1}{4}$ donc $\mathbb{P}(T_{PP}>T_{FP})=\frac{3}{4}$.
3) $\mathbb{P}(T_{PPF}=k,T_{PP}=\ell)=\mathbb{P}(T_{PP}=\ell)/2^{k-\ell}$ pour $k>\ell$ donc $\mathbb{P}(T_{PPF}=k)=\sum_{\ell=2}^{k-1}\mathbb{P}(T_{PP}=\ell)/2^{k-\ell}$.
$\mathbb{P}(T_{FPP}=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{PP}=k-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(T_{FPP}=k-1)=\ldots=\sum_{\ell=1}^{k-2}\mathbb{P}(T_{PP}=k-\ell)/2^\ell=\mathbb{P}(T_{PPF}=k)$.
$\mathbb{E}(T_{PPF})=\mathbb{E}(T_{FPP})=\sum_{\ell=2}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty}k\mathbb{P}(T_{PP}=\ell)/2^{k-\ell}=\sum_{\ell=2}^{\infty}(\ell+2)\mathbb{P}(T_{PP}=\ell)=\mathbb{E}(T_{PP})+2=8$.
4) Il est presque sûr que $PP$ apparait au moins une fois au cours d'une infinité de lancers. La seule possibilité pour que $PPF$ apparaisse avant $FPP$ est que la suite des tirages commence par $PP$. Donc $\mathbb{P}(T_{PPF}>T_{FPP})=\frac{3}{4}$.

**Exercice 15.**

1) $\mathbb{P}(N\geqslant 1)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z_1\neq 0,\ldots,Z_{i-1}\neq 0,Z_i=0)$.
$\mathbb{P}(N\geqslant 2)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z_1\neq 0,\ldots,Z_{i-1}\neq 0,Z_i=0,Z_{i+1}\neq 0,\ldots,Z_{i+j-1}\neq 0,Z_{i+j}=0)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z_1\neq 0,\ldots,Z_{i-1}\neq 0,Z_i=0)\mathbb{P}(Z_1\neq 0,\ldots,Z_{j-1}\neq 0,Z_j=0)=\mathbb{P}(N\geqslant 1)^2$.
De même, $\mathbb{P}(N\geqslant k)=\mathbb{P}(N\geqslant k-1)\mathbb{P}(N\geqslant 1)=\mathbb{P}(N\geqslant 1)^k$.
2) $\mathbb{P}(N=\infty)=1\Leftrightarrow\mathbb{P}(N\geqslant 1)=1\Leftrightarrow$ la série $\sum_k\mathbb{P}(N\geqslant 1)^k$ diverge.
3) Pour $n$ impair, $\mathbb{P}(Z_n=(0,0))=0$. Pour $n=2p$, on a $Z_n=(0,0)$ si et seulement on a tiré autant de fois Nord que Sud, et autant de fois Est qu'Ouest.
Il vient : $\mathbb{P}(Z_{2p}=(0,0))=\frac{1}{4^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\dfrac{(2p)!}{k!\,k!\,(n-k)!\,(n-k)!}=\frac{1}{4^{2p}}\binom{2p}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}^2$.
4) Identifier les coefficients de $X^k$ dans $(1+X)^m(1+X)^n=(1+X)^{m+n}$.
5) $\mathbb{P}(Z_{2n}=(0,0))=\frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}^2\sim\dfrac{1}{\pi n}$. La série diverge.
6) $\mathbb{E}(N_0+\ldots+N_p)=\sum_{n=0}^{p}\mathbb{P}(Z_n=(0,0))$.
7) $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N\geqslant k)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_0+\ldots+N_p\geqslant k)=\mathbb{E}(N_0+\ldots+N_p)$.

**Exercice 16.**

**1) a)** Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\![0, N]\!]^n$ on note $f(x) = \max(x_1, \dots, x_n)$, $h(x) = \mathrm{card}\{i \text{ tq } x_i = f(x)\}$ et $g_i(x) = S/h(x)$ si $x_i = f(x)$, $g_i(x) = 0$ sinon.

Ainsi pour toute issue $\omega$, on a $G_i(\omega) = g_i(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ d'où pour $g \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in S_n$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_i = g) &= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_1 = x_n) \\
&= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}) \dots \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{y \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_{\sigma^{-1}(i)}(y) = g} \mathbb{P}(X_1 = y_1) \dots \mathbb{P}(X_1 = y_n) \\
&= \mathbb{P}(G_{\sigma^{-1}(i)} = g).
\end{aligned}$$

**2) a)** $p_k = 2^{-N} \binom{N}{k}$.

**b)** $V = [\![p+1, N]\!]$.

**c)** $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k) = \mathbb{P}(G' = S/j, X_1 = k) + \mathbb{P}(G' = S/j, X_1 = N-k) = 2\binom{n-2}{j-1} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j}$.

**d)**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G') &= \sum_{k=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{j} \binom{n-2}{j-1} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j} \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{n-1} \binom{n-1}{j} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j} \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{2S}{n-1} \Big( (q_k + \tau_{k-1})^{n-1} - \tau_{k-1}^{n-1} \Big) \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{2S}{n-1} \Big( \tau_k^{n-1} - \tau_{k-1}^{n-1} \Big) \\
&= \frac{2S}{n-1} \Big( \tau_N^{n-1} - \tau_p^{n-1} \Big) \\
&= \frac{2S}{n-1} \Big( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \Big).
\end{aligned}$$

Comme $G_1 = G_2 = \frac{1}{2} G'$, on obtient $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \dfrac{S}{n-1}\Big(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\Big) > \dfrac{S}{n}$ pour tout $n \geqslant 3$.

**3)** Calculs abominables... En admettant la formule donnée, $\tau_p^n - \tau_{p-1}^n \approx n q_p \tau_p^{n-1}$ par accroissements finis, et $\tau_p \approx \frac{1}{2}$ donc $J_1$ et $J_2$ ont probablement encore intérêt à s'associer.

**Exercice 17.**

**1)** Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathrm{cov}(X, Y)| \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$ avec $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

Il y a égalité si et seulement si $X, Y$ sont presque sûrement affinement liées de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

**2)** Appliquer la question précédente aux fonctions indicatrices de $A, B$. Il y a égalité si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $B$ diffère de $A$ ou $\overline{A}$ par un ensemble négligeable.

**Exercice 18.**

1) L'ensemble des valeurs possibles est $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dénombrable.
Pour $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{E_n}$ est une variable aléatoire discrète par addition.
Donc $\{Z \geqslant p\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{Z_k \geqslant p\}$ est un évènement pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit que les ensembles $\{Z = p\} = \{Z \geqslant p\} \setminus \{Z \geqslant p+1\}$ et $\{Z = \infty\} = \bigcap_{p=0}^{\infty} \{Z \geqslant p\}$ sont des évènements.
2) $\overline{F} = \{Z = \infty\}$ est un évènement, donc $F$ en est un.
Par ailleurs, $\{Z \geqslant p\} \subset \bigcup_{n=p-1}^{\infty} E_n$ donc $\mathbb{P}(Z \geqslant p) \leqslant \sum_{n=p-1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $\mathbb{P}(Z = \infty) = 0$ par continuité décroissante.
3) Le théorème d'interversion série-espérance étant hors programme, il faut ruser...

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{E}(Z_k) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k \geqslant i) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k \geqslant i, Z_k = Z) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant i, Z_k = Z) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geqslant i, Z_k = Z)\end{aligned}$$

où $I$ est un entier quelconque. A $I$ fixé, on fait tendre $k$ vers l'infini. Le premier membre converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ tandis que le dernier converge vers $\sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geqslant i, Z \neq \infty)$ par continuité croissante et finitude de $I$. Comme $\mathbb{P}(Z = \infty) = 0$, on a $\mathbb{P}(Z \geqslant i, Z \neq \infty) = \mathbb{P}(Z \geqslant i)$. Ainsi, pour tout $I$ fixé :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \geqslant \sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geqslant i).$$

On fait alors tendre $I$ vers l'infini : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \geqslant \mathbb{E}(Z)$, ce qui résout la question. Comme l'inégalité inverse est triviale, on a en réalité $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ et on a ainsi espérancé terme à terme...

**Exercice 19.**

1) $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X)$.
2) Soit $\varepsilon > 0$ : on fixe $N$ tel que $\sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 > k) \leqslant \varepsilon$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \mathbb{E}(X_n) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n > k) + \sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > k)$. La première somme tend vers 0 par continuité décroisante, $N$ étant fixé. La deuxième est majorée par $\sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 > k) \leqslant \varepsilon$.
3) La suite $(X - X_0 - \ldots - X_n)$ relève de la question précédente.

**Exercice 20.**

**2)** $X = Y + Z$ avec $Y \sim \mathcal{B}(n-1, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(1, p)$.

**3)** Pour $n = ab$ avec $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ on a $\frac{1}{n}(1+t+\ldots t^{n-1}) = \frac{1}{a}(1+t+\ldots+t^{a-1}) \times \frac{1}{b}(1+t^a+\ldots+t^{a(b-1)})$. Donc si $Y$ suit la loi uniforme sur $\{0, \ldots, a-1\}$ et $Z$ suit la loi uniforme sur $\{0, a, \ldots, a(b-1)\}$ avec $Y, Z$ indépendantes alors $Y + Z$ suit la loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$.

**4)** L'énoncé a été posé à Centrale, option PC, mais aucun prof de prépa n'a trouvé de solution de niveau PC. Voici celle qui a été retenue après divers échanges entre les professeurs qui s'y sont intéressés.

Soient $Y$ et $Z$ des variables aléatoires entières indépendantes non presque sûrement constantes telles que $Y + Z$ suive la loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$. On note $p_i = \mathbb{P}(Y = i)$, $q_j = \mathbb{P}(Z = j)$ pour tous $i, j$ dans $\mathbb{N}$ et $a, b$ les degrés des fonctions génératrices de $Y$ et $Z$.

**a)** Les racines de $G_Y$ sont certaines racines $n$-èmes de 1 et elles sont simples, deux à deux conjuguées donc les polynômes $G_Y(t)$ et $t^a G_Y(1/t)$ ont la même factorisation dans $\mathbb{C}[t]$. Ils sont égaux, ce qui implique : $p_i = p_{a-i}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, a\}$.

**b)** On a pour tout $i$ : $p_i q_0 + \ldots + p_0 q_i = 1/n = p_0 q_0$ donc $p_i \leqslant p_0$ et $q_i \leqslant q_0$. De plus pour $i = a$ : $p_a q_0 + \ldots + p_0 q_a = p_0 q_0 + p_1 q_1 + \ldots + p_a q_a$ donc $p_i q_i = 0$ si $i \geqslant 1$.

**c)** On montre par récurrence forte sur $i$ que $p_i = 0$ ou $p_i = p_0$ et $q_i = 0$ ou $q_i = q_0$. Pour l'hérédité : $p_0 q_i + p_i q_0 = p_0 q_0 - (\ldots)$ où $(\ldots)$ est un multiple entier de $p_0 q_0$ et un au plus des deux produits du premier membre est non nul si $i \geqslant 1$; cela suffit à conclure vu **b)**.

**d)** Conclusion : dans $G_Y$, tous les coefficients non nuls sont égaux à $p_0$ et leur somme vaut 1 donc $p_0 = 1/(\text{leur nombre})$. Ce nombre est supérieur ou égal à 2 car $Y$ n'est pas presque sûrement constante. De même $q_0$ est l'inverse d'un entier au moins égal à 2 puis $n = 1/p_0 q_0$ n'est pas premier.

**Exercice 21.**

**1)** $\mathbb{P}(X = i) = \frac{e^{i-1}}{2e^e i!}(i + e) = \mathbb{P}(Y = i)$.

**2)** Non, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$.

**3)** $\mathbb{E}(2^{X+Y}) = \sum_{i,j} \frac{(i+j)2^{i+j} e^{i+j-1}}{2e^{2e} i!\, j!} = 2e^{2e}$.

**Exercice 22.**

**1)** **a)** $\mathcal{B}(n+1, p)$.

**b)** $u(t) \leqslant pq/t^2$ avec $q = 1 - p$.

**2)** **a)** Convexité de la fonction $t \mapsto e^s t$.

**b)** Soit $f(s) = \ln\Big(\dfrac{d}{d-c} e^{sc} - \dfrac{c}{d-c} e^{sd}\Big)$. On a $f''(s) = \ldots = \dfrac{-cde^{s(c+d)}}{(de^{sc} - ce^{sd})^2}(d-c)^2$ et la fraction en facteur est inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$ (développer le dénominateur). Il vient par intégrations : $f(s) \leqslant f(0) + sf'(0) + \dfrac{s^2}{2}\dfrac{(d-c)^2}{4} = \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$.