Espaces probabilisés

Exercice 1. *Vrai ou faux ?*

Dire si chaque affirmation est vraie (alors la prouver) ou fausse (donner un contre-exemple) :

1) Si Ω est un univers et $A, B \subset \Omega$ alors $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}, B, \overline{B}\}$ est une tribu sur Ω.

2) Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, la tribu engendrée par $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$.

3) Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.

4) Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

5) Si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ alors A et B sont incompatibles.

6) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles alors pour tout évènement A la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A \mid A_k)$ est convergente.

Exercice 2. *Tribu sur* $\mathbb{N}$

Montrer que $\mathcal{T} = \{X \subset \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ 2n \in X \Leftrightarrow 2n + 1 \in X\}$ est une tribu.

Exercice 3. *Équité ?*

On considère une société dont chaque individu peut avoir les caractéristiques suivantes :

– il peut être bleu (probabilité p) ou rouge (probabilité $1 - p$) ;

– il peut être riche (probabilité q) ou pauvre (probabilité $1 - q$) ;

On sait de plus que 70% des bleus sont riches et 70% des riches sont bleus. La richesse est-elle équitablement répartie entre les bleus et les rouges ?

Exercice 4. *Probabilité des causes*

On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Exercice 5. *Temps d'attente*

On dispose d'un trouseau de n clés, une seule d'entre elles pouvant ouvrir la porte de l'appartement.

1) On essaie une clé au hasard, puis on recommence tant qu'on n'a pas trouvé la bonne clé. Les essais étant supposés indépendants et le choix d'une clé à chaque essai étant supposé uniforme, déterminer la probabilité qu'on trouve la bonne clé au k-ème essai et la probabilité qu'on ne trouve jamais la bonne clé.

2) Mêmes questions mais en supposant qu'à chaque nouvel essai on choisit uniformément une clé autre que celle que l'on vient d'essayer.

3) Mêmes questions mais en supposant qu'à chaque nouvel essai on choisit uniformément une clé autre que toutes celles que l'on a déjà essayé.

Exercice 6. *Évènements*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements dans un même espace probabilisé.

1) Montrer que les ensembles suivants sont des évènements :
$A =$ « Il y a une infinité d'évènements parmi les A_n qui sont réalisés ».
$B =$ « A partir d'un certain rang, tous les A_n sont réalisés ».
$C =$ « Il n'y a jamais deux évènements consécutifs réalisés ».

2) On suppose les A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$.

3) On suppose les A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = 1/2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et montrer sans la calculer que $0 < \mathbb{P}(C) < 1$.

4) Donner des exemples de telles suites (A_n).

Exercice 7. *Temps d'attente*

On lance une infinité de fois une pièce et on considère l'évènement $A_k =$ « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti trois pile de suite » avec la convention $A_0 = \Omega$.

1) En supposant les lancers mutuellement indépendants et la pièce équilibrée, montrer que $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_{k-2}) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(A_{k-3})$ pour $k \geqslant 3$.

2) On note α, β, γ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^3 - X^2/2 - X/4 - 1/8$. Montrer, sans les calculer, que $\max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) < 1$ et en déduire $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

3) Reprendre l'exercice avec l'évènement $B_k =$ « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti la séquence PFP ».

4) Soit S une suite fixée dans $\{P, F\}^N$. Montrer, sans calcul, qu'il est presque certain que S apparaît au moins une fois lors d'une infinité de tirages mutuellement indépendants, avec P et F de probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque lancer. Montrer qu'il est presque certain que S apparaît une infinité de fois dans les mêmes conditions ; et montrer enfin que ceci reste vrai pour toute pièce vérifiant $\mathbb{P}(P) = p \in]0, 1[$, les lancers étant toujours mutuellement indépendants.

Exercice 8. *Équilibre*

On lance une infinité de fois une pièce et on considère les ensembles de résultats suivants :
$A_n = \{$ sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu autant de P que de $F\}$.
$B_n = \{$ sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu pour la première fois autant de P que de $F\}$.
$C = \{$ sur l'ensemble des lancers, P et F sont arrivés à égalité au moins une fois $\}$.
$D = \{$ sur l'ensemble des lancers, P et F sont arrivés à égalité une infinité de fois $\}$.

1) Montrer que ce sont des évènements.

2) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Calculer $\mathbb{P}(C)$. On distinguera les cas $p \neq q$, $p = q = \frac{1}{2}$.

4) Calculer $\mathbb{P}(D)$.

Exercice 9. *Lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements dans un même espace probabilisé. On note $A =$ « Il y a une infinité d'évènements parmi les A_n qui sont réalisés ».

1) Montrer que A est un évènement.

2) Si la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ est convergente, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

3) Si la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ est divergente et si les A_k sont mutuellement indépendants, montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

4) Donner un cas où $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

Exercice 10. *Non indépendance*

On lance une pièce équilibrée n fois (les lancers sont mutuellement indépendants) et on note $A_k =$ « le k-ème lancer donne P », $B =$ « le nombre total de P est pair ». Montrer que parmi les $n+1$ évènements $A_1, \dots, A_n, B$, n quelconques sont mutuellement indépendants mais les $n+1$ ne le sont pas.

Exercice 11. *Pièces variables*

On lance n pièces, l'une après l'autre, et on fait l'hypothèse que les lancers sont mutuellement indépendants et que la k-ème pièce a une probabilité $1/(2k+1)$ de produire pile. Quelle est la probabilité que le nombre de pile obtenu soit pair ?

Exercice 12. *Limite de probabilités*

Soit $(\mathbb{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{N}$ (avec la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\mathbb{P}_k(\{n\}))$ est convergente, de limite $p_n \in [0, 1]$.

1) a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \leqslant 1$.

b) Donner un exemple où la somme est strictement plus petite que 1.

2) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ et on pose pour $k, n \in \mathbb{N}$: $a_{n,k} = \min(\mathbb{P}_k(\{n\}), p_n)$.

a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}_k(\{n\}) - p_n| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Pour $X \subset \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_k(X) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n\in X} p_n$.

c) Prouver enfin que l'application $X \mapsto \lim_{k\to\infty}(\mathbb{P}_k(X))$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 13. $\mathbb{P}(k\mathbb{N}) = 1/k$?

On démontre dans cet exercice qu'il n'existe par de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant : *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, la probabilité qu'un entier choisi au hasard selon la probabilité* $\mathbb{P}$ *soit divisible par* k *est égale à* $1/k$. Pour cela, on raisonne par l'absurde ; soit $\mathbb{P}$ une telle probabilité.

1) Montrer que si $k_1, \dots, k_m$ sont des entiers non nuls et deux à deux premiers entre eux, alors les évènements $A_i =$ « n est divisible par k_i » sont mutuellement indépendants.

2) Montrer que l'évènement $A =$ « n n'est divisible par aucun facteur premier » est de probabilité nulle.

3) Généraliser et conclure.

Exercice 14. *Permutation aléatoire*

On veut tirer au hasard une permutation des entiers $1, \dots, n$ et on envisage les deux méthodes suivantes.

1) On fixe un entier N, et on tire $2N$ entiers $i_1, j_1, \dots, i_N, j_N \in [\![1, n]\!]$ de manière uniforme et indépendante. On calcule alors $\sigma = (i_1\ j_1) \circ \dots \circ (i_N\ j_N)$ avec la convention $(i_k\ j_k) = \mathrm{id}$ si $i_k = j_k$.

a) Comment choisir N pour être sûr de pouvoir obtenir chaque permutation ?

b) Lorsque cette condition est remplie, permutation obtenue est-elle uniformément distribuée sur S_n ?

2) On tire de manière uniforme et indépendante des entiers $k_1 \in [\![0, 1]\!]$, $k_2 \in [\![0, 2]\!]$,...,$k_{n-1} \in [\![0, n-1]\!]$ et on calcule $\sigma = (1\ 2)^{k_1} \circ (1\ 2\ 3)^{k_2} \circ \dots \circ (1\ \dots\ n)^{k_{n-1}}$. Peut-on ainsi obtenir toutes les permutations ? Sont-elles équiprobables ?

Exercice 15. *Fonction ζ, Mines-Ponts 2015*

Soit $s \in]1, +\infty[$ et $\rho_s : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{1}{\zeta(s)} \sum_{k \in A} \dfrac{1}{k^s} \end{cases}$ où $\zeta(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{k^s}$.

1) Montrer que ρ_s est une probabilité.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ constiué des multiples de n. Calculer $\rho_s(A_n)$.

3) Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n, \dots)$ la suite des nombres premiers. Montrer que les évènements $A_{\ell_1}, \dots, A_{\ell_n}, \dots$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité ρ_s.

4) En déduire que $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\ell_i^s}\right)$.

solutions

Exercice 1.

1) faux, ne contient par $A \cup B$.
2) Vrai, elle contient tous les singletons.
3) Faux, prendre $A = B$ de probabilité $\frac{1}{2}$.
4) Faux lorsque $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$.
5) Faux, $A \cap B$ est négligeable.
6) Faux, prendre $A = \Omega$.

Exercice 3.

$\mathbb{P}(\text{riche}|\text{bleu})p + \mathbb{P}(\text{riche}|\text{rouge})(1-p) = q$. La richesse est équitablement répartie ssi $q = 70\%$.

Exercice 4.

Il manque l'information concernant les probabilités que l'objet soit dans un tiroir ou un autre sachant qu'il est dans le meuble. Supposons que ces probabilités sont égales à $1/7$ et soient A_i l'évènement « l'objet est dans le tiroir i » et B l'évènement « l'objet n'est pas dans le meuble ».
On a $\mathbb{P}(A_7) = \mathbb{P}(A_7 \mid \overline{B})p + \mathbb{P}(A_7 \mid B)(1-p) = p/7$ puis $\mathbb{P}(A_7 \mid A_7 \cup B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_7)}{\mathbb{P}(A_7) + \mathbb{P}(B)} = \dfrac{p}{7-6p}$.

Exercice 5.

1) $p_k = (n-1)^{k-1}/n^k$, $p_\infty = 0$.
2) $p_1 = 1/n$, $p_k = (n-2)^{k-2}/n(n-1)^{k-2}$ pour $k \geqslant 2$, $p_\infty = 0$.
3) $p_k = 1/n$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 6.

1) $A = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$; $B = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$; $C = \Omega \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \cap A_{n+1}))$.
2) $\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2}) + \ldots = 1$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$.
$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$ donc $\mathbb{P}(B) = 0$.
$\mathbb{P}(C) \leqslant \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty}(\overline{A_{2n} \cap A_{2n+1}})) = 0$ donc $\mathbb{P}(C) = 0$.
3) $\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1/2^n$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.
$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$ donc $\mathbb{P}(B) = 0$.
$\frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_0 \cap A_1) \leqslant \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \cap A_{n+1})) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^{2n+3} = \frac{1}{6}$.
4) Dans un jeu de pile ou face infini, $A_n =$ « le lancer de rang n donne pile » ;
$A'_n =$ « les lancers de rang $10^n, 10^n + 1, \ldots, 10^n + n$ donnent tous pile ».

Exercice 7.

1) Conditionner par le résultat des lancers de rang $k-3, k-2, k-1$.
2) Par étude de fonction, il existe une unique racine réelle $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Les deux autres racines sont non réelles conjuguées et $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{1/8\alpha} < \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(A_k)$ est combinaison linéaire des suites (α^k), (β^k), (γ^k) donc $\mathbb{P}(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3) En conditionnant par le nombre n de pile consécutifs à la fin des k lancers, on obtient
$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_{k-1}) + \sum_{n=1}^{k-2} \mathbb{P}(B_{k-n-2})/2^{n+2}$, puis $\mathbb{P}(B_{k+1}) = \mathbb{P}(B_k) - \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_{k-1}) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(B_{k-2})$.
L'équation caractéristique admet à nouveau trois racines $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et β, γ non réelles conjuguées de module $< \frac{1}{2}$, d'où $\mathbb{P}(B_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
4) Découper la suite des lancers en blocs de taille N.

Exercice 8.

2) $\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n}(pq)^n$, $\mathbb{P}(B_n) = 2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n/n$.
3) $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 2\min(p,q)$ par DSE dans le cas $p \neq q$ et par intégration terme à terme, cas réel positif dans le $p = q = \frac{1}{2}$.
4) $\mathbb{P}(D) = 0$ si $p \neq q$, $\mathbb{P}(D) = 1$ si $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 9.

1) $A = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$.
2) $\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3) $1-\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1-\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(\overline{A_n}\cap A_{n+1})+\mathbb{P}(\overline{A_n}\cap\overline{A_{n+1}}\cap A_{n+2})+\ldots = (1-\mathbb{P}(A_n))(1-\mathbb{P}(A_{n+1}))\ldots$
La série de terme général $-\ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ est divergente : grossièrement si $\mathbb{P}(A_n)$ ne tend pas vers zéro, sinon par équivalence si $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc le produit infini précédent est nul, ce qui suffit à conclure.
4) Tous les A_k égaux à un même évènement de probabilité $\frac{1}{2}$.

Exercice 11.

Soit p_n cette probabilité. En conditionnant par le résultat du n-ème lancer, on a
$(2n+1)p_n = 1 + (2n-1)p_{n-1} = \ldots = (n-1) + 3p_1 = n+1$.

Exercice 12.

1) a) Passer à la limite dans une somme finie.
   b) $\mathbb{P}_k(X) = 1$ si $k \in X$, 0 sinon.
2) a) Pour N fixé, $\sum_{n\leqslant N} a_{n,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n\leqslant N} p_n$ et pour k fixé, $\sum_{n\leqslant N} a_{n,k} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k}$. Cette dernière convergence est uniforme par rapport à k car $a_{n,k} \leqslant p_n$ donc on peut intervertir les limites : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$.
   La deuxième convergence résulte de la relation $|\mathbb{P}_k(\{n\}) - p_n| = \mathbb{P}_k(\mathbb{N}) + p_n - 2a_{n,k}$.
   b) $|\mathbb{P}_k(X) - \sum_{n\in X} p_n| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}_k(\{n\}) - p_n|$.

Exercice 13.

2) $\prod_{p \text{ premier}}(1-1/p) = 0$.
3) De même, si $p_1, \ldots, p_k$ sont premiers distincts alors

$$\mathbb{P}(n \text{ n'a pas de diviseur premier en dehors de } p_1, \ldots, p_k) = 0$$

et par union croissante : $\mathbb{P}(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = 0$, en contradiction avec $\mathbb{P}(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 14.

1) a) La composée de N transpositions a au moins $n-N$ orbites si $N < n$ et il existe des permutations à une seule orbite (les n-cycles) donc il faut $N \geqslant n-1$. Cette condition est suffisante, toute permutation de n éléments peut être décomposée en au plus $n-1$ transpositions.
   b) Non, la taille de l'univers est n^{2N} qui n'est pas un multiple de $n!$ si $n \geqslant 3$.
2) Oui.

Exercice 15.

2) $1/n^s$.
4) Les évènements contraires (k n'est pas divisible par ℓ_i) sont aussi mutuellement indépendants donc le produit de leurs probabilités est la probabilité de leur intersection qui est égale à $\{1\}$.