Fonctions symétriques

Exercice 1. $a/b+b/c+c/a$

Soient a,b,c les racines de X^3+pX+q, $q\neq 0$. Calculer : $\sum_{\sigma\in S_3}\left(\dfrac{\sigma(a)}{\sigma(b)}+\dfrac{\sigma(b)}{\sigma(c)}+\dfrac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right)$.

Exercice 2. $1/(x_i-1)$

Soient x_1,x_2,x_3,x_4 les racines de X^4+X+1. Calculer $\sum_{i=1}^4 \dfrac{1}{x_i-1}$.

Exercice 3. $x_i/(x_jx_k)$

Soient $x_1,\dots,x_8$ les racines de $X^8+X^7-X^2+3$. Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant j<k\leqslant 8}\dfrac{x_i}{x_jx_k}$.

Exercice 4. x_i^7

Soient a,b,c les racines de X^3-X+1. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

Exercice 5. $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $1/a+1/b+1/c$ *donnés*

Résoudre $\begin{cases} a + b + c = 0\\ a^2+b^2+c^2 = 1\\ 1/a+1/b+1/c = -1.\end{cases}$

Exercice 6. *Ensi P 90*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} x+y+z=2\\ x^2+y^2+z^2=6\\ 1/x+1/y+1/z=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Exercice 7. $\int_{t=-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = d(P(a)+P(b)+P(c))$

Trouver $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall\, P\in\mathbb{R}_3[X]$, $\int_{t=-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = d(P(a)+P(b)+P(c))$.

Exercice 8. a,b,c *en progression géométrique*

Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$.

Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab+ac+bc)^3=abc(a+b+c)^3$.

Exercice 9. *Condition liant les racines*

Soit $P=X^3+pX+q$ de racines a,b,c.

1) CNS pour ces racines soient aux sommets d'un carré ?

2) CNS pour que $a^2+b^2=1+c^2$?

Exercice 10. *Condition liant les racines*

Soient A,B,C les points dont les affixes sont les racines de X^3+pX+q, $p,q\in\mathbb{C}$. A quelle condition sur p et q a t-on $AB=AC=2BC$?

Exercice 11. *Condition liant les racines*

Soit $P=X^4+aX^2+bX+c$ de racines $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. CNS pour ces racines soient en progression arithmétique ?

Exercice 12. *Transformation d'équation*

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3+2X^2+3X+4.

Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ sont *les* racines.

Exercice 13. *Transformation d'équation*

Soient x_1,x_2,x_3 les racines de X^3+aX^2+bX+c.

Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2,x_2^2,x_3^2 sont *les* racines.

Exercice 14. $2X^3+5X^2-X+\lambda$ *a une racine de module 1*

Trouver $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $2X^3+5X^2-X+\lambda$ ait une racine de module 1.

Exercice 15. *Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ dont les racines sont de module 1*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1.

1) Démontrer que $\mathcal{E}$ est fini.

2) Pour $P \in \mathcal{E}$ de racines $x_1, \dots, x_n$, on note $\widetilde{P}$ le polynôme unitaire de racines $x_1^2, \dots, x_n^2$. Démontrer que $\widetilde{P} \in \mathcal{E}$.

3) En déduire que : $\forall P \in \mathcal{E}$, les racines de P sont des racines de l'unité.

Exercice 16. *Centrale MP 2001*

Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d réels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour qu'il existe une droite coupant la courbe représentative de f en quatre points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 tels que $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$.

solutions

Exercice 1.
$3\Big(\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\Big)=-9$.

Exercice 2.
$-\frac{5}{3}$.

Exercice 3.
$\frac{1}{3}$.

Exercice 4.
$x^7=-2x^2+2x-1 \Rightarrow a^7+b^7+c^7=-7$.

Exercice 5.
$\{a,b,c\}=\{1,-\frac{1+i}{2},-\frac{1-i}{2}\}$.

Exercice 6.
$\{x,y,z\}=\{-1,1,2\}$.

Exercice 7.
$d=\frac{2}{3}$, $\{a,b,c\}=\{0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Exercice 9.
1) $50p^3=27q^2$.
2) $a^2+b^2+c^2=2c^2+1=-2p \Rightarrow$ l'une des racines de l'équation aux carrés $(-Y^3-2pY^2-p^2Y+q^2)$ doit être $-p-\frac{1}{2}$. CNS $\Leftrightarrow 2p+1+8q^2=0$.

Exercice 10.
$20p^3+27q^2=0$.

Exercice 11.
$b=0$, $c=\frac{9}{100}a^2 \Rightarrow$ racines : $-3x,-x,x,3x$ avec $10x^2=-a$.

Exercice 12.
$-P(-2-X)=X^3+4X^2+7X+2$.

Exercice 13.
$X^3+(2b-a^2)X^2+(b^2-2ac)X-c^2$.

Exercice 14.
racine 1 : $\lambda=-6$.
racine -1 : $\lambda=-4$.
racine $\alpha\in\mathbb{U}\setminus\{\pm1\}$: les autres sont $1/\alpha$ et $-\lambda \Rightarrow \lambda=6$, $\alpha=\frac{1+i\sqrt{15}}{4}$.

Exercice 15.
1) Les coefficients de P sont bornés.
2) $\widetilde{P}(X^2)=(-1)^nP(X)P(-X) \Rightarrow \widetilde{P}\in\mathbb{Z}[X]$.
3) La suite $(\overset{\vdots}{\widetilde{P}})$ prend un nombre fini de valeurs.

Exercice 16.

Soit $y = \gamma x + \delta$ l'équation de la droite en question. On veut que l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + (c - \gamma)x + (d - \delta) = 0$$

ait quatre racines distinctes en progression arithmétique. Si r est la raison de cette progression alors les racines sont $-\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}r$, $-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r$, $-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}r$ et $-\frac{1}{4}a + \frac{3}{2}r$. On doit donc chercher à quelle condition sur a, b, c, d il existe γ, δ, r réels tels que :

$$\begin{aligned}
&(-\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}r)(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r) + \ldots + (-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{3}{2}r) = -b,\\
&(-\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}r)(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}r) + \ldots + (-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{3}{2}r) = c - \gamma,\\
&(-\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}r)(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}r)(-\frac{1}{4}a + \frac{3}{2}r) = \delta - d.
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont satisfaites à r donné en choisissant convenablement γ et δ. La première s'écrit après simplifications : $\frac{5}{2}r^2 = \frac{3}{8}a^2 + b$ et la condition demandée est $3a^2 + 8b > 0$.