Racines de polynômes

Exercice 1. *Factorisation de $X^n - 1$*
Factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$.
1) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.
2) Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n} + \theta)$.
3) On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{k\neq\ell,\ k,\ell\in[\![0,n-1]\!]}(\omega^k - \omega^\ell)$.

Exercice 2. *Mines MP 1999*
Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos(n\theta))$ pour $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Exercice 3. *Racines de j et j^2*
Montrer que si $p \leqslant n$, alors $X^{2^p} + X^{2^{p-1}} + 1$ divise $X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$.

Exercice 4. $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ *divise* $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$
Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$. Pour $\sin\theta \neq 0$, chercher le quotient.

Exercice 5. $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ *divise* $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n \cos n\theta - X\cos\theta + 1$
Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$, puis déterminer le quotient.

Exercice 6. $X^8 + X^4 + 1$ *divise* $X^{8n} + pX^{4n} + q$
CNS sur $p, q \in \mathbb{C}$ pour que $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{8n} + pX^{4n} + q$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) ?

Exercice 7. *Racines rationnelles*
Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant qu'il existe des racines rationnelles.

Exercice 8. *Équation de degré 4 tq $x_1x_2 = 5$*
Trouver les racines de $P(X) = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que deux racines, x_1 et x_2 vérifient : $x_1x_2 = 5$ (on introduira le polynôme $Q = X^4P(5/X)$).

Exercice 9. *Racines multiples*
Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Exercice 10. *Recherche d'une racine triple*
Soit $P = X^5 + aX^2 + 15X - 6i$. Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que P a une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Exercice 11. *Ensi P 90*
Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Exercice 12. $x_1 + x_2 = 1$
Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^5 + pX + q$. Donner une CNS sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Exercice 13. *Factorisation*
Factoriser $1 - \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X(X-1)}{2!} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{X(X-1)\ldots(X-n)}{(n+1)!}$.

Exercice 14. $X - 1 \mid P(X^n) \Rightarrow X - 1 \mid P$
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
1) Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors P est divisible par $X - 1$.
2) Montrer que si $P(X^3) + XQ(X^3)$ est divisible par $X^2 + X + 1$, alors P et Q sont divisibles par $X - 1$.

Exercice 15. *Racines de* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sin k\theta)X^k$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin n\theta \neq 0$. Démontrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sin k\theta)X^k$ a toutes ses racines réelles.

Exercice 16.
Démontrer que $1+X+X^n$ n'a que des racines simples.

Exercice 17. *P' divise P*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 18. *Équations fonctionnelles*
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que ...
1) $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
2) $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
3) $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$.

Exercice 19. *P à racines réelles simples $\Rightarrow P^2 + a^2$ à racines simples*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.
1) Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.
2) En déduire que : $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, les racines de $P^2 + a^2$ sont simples.

Exercice 20. *P et Q ont même module*
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = |Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $P = uQ$.

Exercice 21. *Valeur moyenne*
Soient $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $P(z_0) = \frac{1}{n}(P(z_1) + \dots + P(z_n))$.
On note $\Phi(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$.
1) Calculer $\dfrac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
2) En déduire que $\Phi(X) = \frac{1}{n}(X - z_0)\Phi'(X) + \Phi(z_0)$.
3) Démontrer que $z_1, \dots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
4) Réciproque ?

Exercice 22. *$P(x) \neq 14$*
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 7$ pour au moins quatre valeurs distinctes $x \in \mathbb{Z}$.
Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, on a $P(x) \neq 14$.

Exercice 23. *Nombre algébrique rationnel*
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha) = 0$ est appelé : *polynôme minimal de α*.
1) Soit α algébrique de polynôme minimal P. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P.
2) Soit α algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2} \deg P$. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 24. *$P(\sqrt{2}) = 0$*
Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Démontrer que $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que $\sqrt{2}$.

Exercice 25. *Polynôme minimal de $2\cos(2\pi/7)$*
Montrer que $x = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Quelles sont les autres racines ?

Exercice 26. *Racines réelles simples*
Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.
1) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.
2) Démontrer que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 27. *Méthode de Ferrari*
Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$.
Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double. Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28. *Pgcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ racine comune*
Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine en commun dans $\mathbb{C}$.

Exercice 29. *Mines MP 2001*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p.
1) Montrer que $\sigma : x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.
2) Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Exercice 30. *Centrale MP 2001*
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \ldots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P. Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geqslant 0$.

Exercice 31. *X MP* 2004*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. Pour $\omega \in \mathbb{U}$ on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P et $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Montrer que les racines de Q sont de module 1.

Exercice 32. *X MP* 2005*
Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \ldots + |a_{n-1}| < a_n$. Soit $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos(nx)$. Montrer que les zéros de f sont tous réels (cad. si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(x) \neq 0$).

Exercice 33. *racine multiple, Centrale MP 2010*
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(P) = 1 + \deg(Q) = n \geqslant 2$. On veut montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P + aQ$ a une racine multiple.
1) Le montrer quand $n = 2$.
2) On suppose ici $P \wedge Q = 1$.
  a) Montrer que toute racine commune à Q et a $PQ' - QP'$ a une multiplicité plus grande dans Q.
  b) En déduire qu'il existe une racine de $PQ' - QP'$ qui n'est pas racine de Q.
  c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P + aQ$ a une racine multiple.
3) Traiter le cas où P et Q ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 34. *Mines MP 2011*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) \neq 0$, $P'(a) = P''(a) = 0$. Montrer que P n'est pas scindé.

Exercice 35. *Polynôme à deux variables, ULC 2010*
$P \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que $P(X, Y) = \ldots + cX^aY^b + \ldots$ avec $c \neq 0$, $a, b \neq 0$ et $a + b = \deg P$. Soit A et B finis, inclus dans $\mathbb{C}$ tels que $\operatorname{card} A > a$ et $\operatorname{card} B > b$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tels que $P(\alpha, \beta) \neq 0$.

solutions

Exercice 1.

1) $n2^{1-n}$.

2) $\sin(n\theta)2^{1-n}$.

3) $-(-n)^n$.

Exercice 2.

$\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1 = (\omega^k - e^{i\theta})(\omega^k - e^{-i\theta})$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k - x) = (-1)^n(x^n - 1)$.

Exercice 4.

$X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1 = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta})$.

$$\begin{aligned}
Q &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} X^k e^{i(n-1-k)\theta}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n-1} X^l e^{-i(n-1-\ell)\theta}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} X^k \Big(\sum_{p=0}^{k} e^{i(k-2p)\theta}\Big) + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \Big(\sum_{p=k-n+1}^{n-1} e^{i(k-2p)\theta}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} X^k \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \frac{\sin(2n-k-1)\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Division de proche en proche : $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \cos k\theta$.

Exercice 6.

$\Leftrightarrow X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + pX^n + q \Leftrightarrow j^{2n} + pj^n + q = 0$.

Exercice 7.

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Exercice 8.

On calcule $\operatorname{pgcd}(P(X), Q(X)) = X^2 + 5$, d'où $x_1 = i\sqrt{5}$ et $x_2 = -i\sqrt{5}$.

On obtient alors : $P(X) = (X^2+5)(X^2-3X+1)$. Les deux dernières racines sont $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9.

$P = (X-2)^2(X-3)^3$.

Exercice 10.

$a = 10i$. Racines : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Exercice 11.

$\lambda = 0$, $x = 1$.

Exercice 12.

P doit être divisible par $X^2 - X + r$, d'où $r^2 - 3r + p + 1 = 2r^2 - r + q = 0$.

Le pgcd de ces expressions doit être non constant soit : $4p^2 - 4pq + q^2 + 3p + 11q - 1 = 0$.

Exercice 13.

$= (-1)^{n+1}\dfrac{(X-1)\dots(X-n)(X-(n+1))}{(n+1)!}$.

Exercice 15.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = \Im((1+xe^{i\theta})^n)$. Donc $P(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\, k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$. On obtient $x_k = \dfrac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\theta - k\pi/n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 17.

$P = a(X-b)^\alpha$.

Exercice 18.

1) si $P(x) = 0$, alors $P((x-1)^2) = P((x+1)^2) = 0$.
On a toujours $|x| < \max\{|x-1|, |x+1|\}$ donc, s'il y a une racine de module > 1, il n'y a pas de racine de module maximal et $P = 0$.
Or $\max\{|x-1|, |x+1|\} \geqslant 1$ avec égalité ssi $x = 0$. Donc $P = 0$ ou $P = 1$.

2) Si x est racine, alors x^2 et $(x+1)^2$ le sont aussi.
$\Rightarrow |x| = 0$ ou $1 \Rightarrow |x+1| = 0$ ou $1 \Rightarrow x \in \{0, -1, j, j^2\}$.
$x = 0$ ou $x = -1 \Rightarrow P(1) = 0$: exclus.
Donc $P = a(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$ et en remplaçant : $P = (X^2+X+1)^\alpha$.

3) Seule racine possible : $1 \Rightarrow P = -(X-1)^k$.

Exercice 20.

Mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Exercice 21.

1) $P = \dfrac{\Phi}{X - z_k} \Rightarrow P(z_0) = \frac{1}{n}P(z_k) = \frac{1}{n}\Phi'(z_k)$.

2) Les deux membres sont égaux en $z_0, \dots, z_n$.

3) Décomposer Φ sur la base $((X-z_0)^k)$.

4) $\sum_k e^{2ikp/n} = 0$ pour $p < n \Rightarrow$ OK.

Exercice 25.

$x = z + \dfrac{1}{z}$ avec $z^6 + z^5 + \ldots + 1 = 0$. Autres racines : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Exercice 26.

1) Soit $P(x) = a_n\prod_{k=1}^n (x - x_k)$. On a : $\sum_{k=0}^n \dfrac{1}{(x-x_k)^2} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\dfrac{P'}{P}\Big)(x) = \dfrac{P'^2 - PP''}{P^2}(x)$.

2) Pour $k = 1, x = 0$, on a : $a_0a_2 \leqslant \frac{1}{2}a_1^2$. Pour k quelconque : on applique le cas précédent à $P^{(k-1)}$ dont les racines sont encore réelles simples : $(k-1)!a_{k-1} \times \dfrac{(k+1)!}{2}a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(k!a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1}a_k^2$.

Exercice 27.

$Q = X^2 - 3X + 1$, $P = (X - \frac{5+\sqrt{33}}{2})(X - \frac{5-\sqrt{33}}{2})(X^2 - X + 4)$.

Exercice 29.

1) p est premier car $\mathbb{K}$ est intègre.
On a $1^p = 1$, $(xy)^p = x^py^p$ (un corps est commutatif) et $(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}x^ky^{p-k} = x^p + y^p$ car p divise $\binom{p}{k}$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

2) Remarquer que $P' = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{K}[X^p]$.

On suppose σ surjectif. Soit $P(X) = Q(X^p) = a_0 + \ldots + a_kX^{kp}$ un polynôme non constant à dérivée nulle. Il existe $b_0, \dots, b_k$ tels que $b_i^p = a_i$. Alors $P(X) = Q(X)^p$ est réductible.

On suppose que tout polynôme irréductible a une dérivée non nulle. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P(X) = X^p - a$. $P' = 0$ donc P est réductible. Soit Q un facteur unitaire irréductible de $X^p - a$. Alors Q^p et $X^p - a$ ont Q en facteur commun donc leur pgcd, D, est non constant. Mais Q^p et $X^p - a$ appartiennent à $\mathbb{K}[X^p]$ donc D, obtenu par l'algorithme d'Euclide aussi, d'où $D = X^p - a$ et $X^p - a$ divise Q^p. Par unicité de la décomposition de Q^p en facteurs irréductibles, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $X^p - a = Q^r$. Par examen du degré on a $r = p$ donc $\deg Q = 1$, $Q = X - b$ et finalement $b^p = a$.

Exercice 30.

$V(\alpha)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P^{(n)}(\alpha)$ ont même signe ; de même pour $V(\beta)$. Comme $P^{(n)}(\alpha) = P^{(n)}(\beta)$ on en déduit que $V(\alpha) - V(\beta)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ ont même signe, donc si et seulement si P a un nombre pair de racines dans $[\alpha, \beta]$.

Décroissance de V : V est constant sur tout intervalle ne contenant aucune racine de $P, P', \ldots, P^{(n-1)}$. Considérons $x_0 \in [\alpha, \beta[$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \ldots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x > x_0$, $P^{(k)}(x)$ a même signe que $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(k+1)}(x), \ldots, P^{(\ell)}(x)$ ont même signe que $P^{(\ell)}(x_0)$ donc les nombres de changements de signe dans les sous-suites $(P^{(k)}(x), \ldots, P^{(\ell)}(x))$ et $(P^{(k)}(x_0), \ldots, P^{(\ell)}(x_0))$ sont égaux. De même si $P(x_0) = \ldots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Ceci prouve que $V(x_0^+) = V(x_0)$ pour tout $x_0 \in [\alpha, \beta[$.

On considère à présent $x_0 \in]\alpha, \beta]$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \ldots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x < x_0$ la sous-suite $(P^{(k)}(x), \ldots, P^{(\ell)}(x))$ a $\ell - k - 1$ changements de signe si $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(\ell)}(x_0)$ ont même signe, $\ell - k$ changements de signe sinon tandis que la sous-suite $(P^{(k)}(x_0), \ldots, P^{(\ell)}(x_0))$ en a un ou zéro. Si $P(x_0) = \ldots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ on trouve de même ℓ changements de signe pour $(P(x), \ldots, P^{(\ell)}(x))$ et zéro pour $(P(x_0), \ldots, P^{(\ell)}(x_0))$ donc dans tous les cas $V(x_0^-) \geqslant V(x_0)$. Ceci achève la démonstration.

Exercice 31.

Pour $z \in \mathbb{U}$, on a $Q(z) = 0 \Leftrightarrow P(z)/z^d\overline{P}(\overline{z}) = -\omega$. Comme $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, les deux membres ont même module pour tout $z \in \mathbb{U}$, il faut et il suffit donc que les arguments soient égaux modulo 2π. Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(e^{i\theta} - a)$ augmente de 2π lorsque θ varie de 0 à 2π donc, vu l'hypothèse sur les racines de P, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(P(z)/z^d\overline{P(z)}\,)$ augmente de $2\pi d$ lorsque θ varie de 0 à 2π. Une telle détermination prend donc au moins d fois une valeur congrue à $\operatorname{Arg}(-\omega)$ modulo 2π, ce qui prouve que Q admet au moins d racines distinctes dans $\mathbb{U}$.

Exercice 32.

$f(2k\pi/n) > 0 > f((2k+1)\pi/n)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc f admet $2n$ racines dans $[0, 2\pi[$. En posant $z = e^{ix}$, $z^n f(x)$ est un polynôme en z non nul de degré $2n$ ayant $2n$ racines sur le cercle unité ; il n'en n'a pas ailleurs.

Exercice 33.

1) $P = X^2 + \alpha X + \beta$, $Q = X + \gamma$: on veut $(\alpha + a)^2 = 4(\beta + a\gamma)$ ce qui est une équation de degré 2 en a.

2) **c)** Soit α une telle racine et $a = -P(\alpha)/Q(\alpha)$. Par construction La fraction rationnelle $F = P/Q + a$ admet α comme racine multiple, donc le polynôme $QF = P + aQ$ aussi.

3) Soit α une racine commune à P et Q, $P = (X - \alpha)P_1$ et $Q = (X - \alpha)Q_1$. Si $\deg(P_1) \geqslant 2$, on trouve par récurrence $a \in \mathbb{C}$ tel que $P_1 + aQ_1$ a une racine multiple. Si $\deg(P_1) = 1$ alors Q_1 est constant non nul et on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que $(P_1 + aQ_1)(\alpha) = 0$.

Exercice 34.

On suppose que $P = \lambda \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{m_i}$. On a alors $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^r \dfrac{m_i}{x - x_i}$, puis en dérivant,

$\dfrac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} = -\sum_{i=1}^r \dfrac{m_i}{(x - x_i)^2}$. En prenant la valeur en a (qui n'est pas l'un des x_i) on a une contradiction. On en déduit que P n'est pas scindé.

Exercice 35.

On procède par récurrence sur b. Pour $b = 0$ alors $P(X, \beta)$ (avec $\beta \in B$) est un polynôme de degré a, il ne peut pas avoir $\operatorname{card} A$ racines. Si β est un élément de B, on divise $P(X, Y) - P(X, \beta)$ par $Y - \beta$. On a $P(X,Y) - P(X,\beta) = \sum_{ij} c_{ij} X^i (Y^j - \beta^j) = (Y - \beta) \sum_{ij} c_{ij} X^i (Y^{j-1} + \ldots + \beta^{j-1}) = (Y - \beta)Q(X, Y)$, où $\deg Q = a + b - 1$ et le coefficient de $X^a Y^{b-1}$ dans Q est c. Par hypothèse de récurrence, il existe un point dans $A \times (B \setminus \{\beta\})$ qui n'est pas racine de Q et donc un point de $A \times B$ qui n'est pas racine de P.