Polynômes

Exercice 1. *Familles libres de polynômes*
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Exercice 2. *Formule de Van der Monde*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(X^n(1-X)^n)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3. *Familles libres de polynômes*
Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ non constants. On pose $P_k = U^k V^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre ...
1) lorsque $U \wedge V = 1$.
2) lorsque (U, V) est libre.

Exercice 4. *Ensi PC 1999*
Déterminer les polyômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}(X)$ tels que $P(X)+1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X)-1$ est multiple de $(X+1)^n$.

Exercice 5. *Opérateur différence*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. On note $U_p = \dfrac{X(X-1)\dots(X-p+1)}{p!}$ pour $p \in \mathbb{N}$, et $\mathit{\Delta} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{cases}$
1) Démontrer que la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2) Calculer $\mathit{\Delta}^n(U_p)$.
3) En déduire : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = P(0) + (\mathit{\Delta} P)(0)U_1 + (\mathit{\Delta}^2 P)(0)U_2 + \ldots + (\mathit{\Delta}^n P)(0)U_n$.
4) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières (on considère que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ vu $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$).
5) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathit{\Delta}^n(f) = 0$.

Exercice 6. *Liberté de $P(X), \dots, P(X+n)$*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.
Démontrer que la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On pourra utiliser l'opérateur $\mathit{\Delta}$ de l'exercice **5**.

Exercice 7. $(X+z_0)^n, \dots, (X+z_k)^n$, *Centrale MP 2003*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z_0, \dots, z_k$ des complexes. Soient les polynômes $P_0 = (X+z_0)^n, \dots, P_k = (X+z_k)^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_0, \dots, P_k)$ soit une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 8. $P - X \mid P \circ P - X$
1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2+3z+1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Exercice 9. $P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $\mathit{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X). \end{cases}$
1) Chercher $\deg(\mathit{\Phi}(P))$ en fonction de $\deg P$.
2) En déduire $\mathrm{Ker}\,\mathit{\Phi}$ et $\mathrm{Im}\,\mathit{\Phi}$.
3) Montrer que : $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $\exists! P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\mathit{\Phi}(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 10. $P \mapsto (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a)$
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $a \in \mathbb{K}$ et

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a). \end{cases}$$

Chercher $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Exercice 11. $A^3+B=C^3+D$
Soient $A,B,C,D \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} \deg A = \deg C = m \\ \deg B < 2m,\ \deg D < 2m \\ A^3+B=C^3+D. \end{cases}$
Montrer que $A=C$ et $B=D$. Trouver un contre-exemple avec des polynômes à coefficients complexes.

Exercice 12. $P(n) \mid P(n+P(n))$
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$, et $p=P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.

Exercice 13. $P(a/b)=0 \Rightarrow a-kb$ *divise* $P(k)$
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a,b \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que$P(a/b)=0$.
1) Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a-kb$ divise $P(k)$.

Exercice 14. *Automorphismes de* $\mathbb{K}[X]$
Pour $A \in \mathbb{K}[X]$ on note Φ_A : $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P \circ A \end{cases}$
1) Démontrer que les applications Φ_A sont les seuls endomorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$.
2) A quelle condition Φ_A est-il un isomorphisme ?

Exercice 15. *Sous anneau non principal de* $\mathbb{K}[X]$
Soit $A=\{P \in \mathbb{K}[X]$ dont le coefficient de X est nul$\}$. Démontrer que A est un sous anneau non principal de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 16. *Équation* $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$
Trouver $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$.

Exercice 17. *Équation* $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$.

Exercice 18. $P(X)+P(X+1)=2X^n$
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.
1) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n$.
2) Chercher une relation de récurrence entre P_n' et P_{n-1}.
3) Décomposer $P_n(X+1)$ sur la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4) Démontrer que $P_n(1-X)=(-1)^nP_n(X)$.

Exercice 19. $(1-X)^nP+X^nQ=1$
1) Démontrer qu'il existe $P,Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^nP+X^nQ=1$.
2) Montrer que $Q=P(1-X)$.
3) Montrer que : $\exists\,\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(1-X)P'-nP=\lambda X^{n-1}$.
4) En déduire P lorsque $\operatorname{car}(\mathbb{K})=0$.

Exercice 20. *Endomorphismes de* $\mathbb{K}[X]$ *qui commutent avec la dérivation*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ commutant avec la dérivation, c'est à dire :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ \Phi(P')=\Phi(P)'.$$

1) Montrer qu'il existe un unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires tels que : $\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\Phi(P)=\sum_{k=0}^n a_kP^{(k)}$.
2) Décomposer ainsi l'endomorphisme $\Phi : P \mapsto P(X+1)$.

Exercice 21. *P est positif $\Rightarrow P+P'+P"+\dots$ aussi*
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$. Démontrer que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ (P+P'+P''+\dots)(x)\geqslant 0$.

Exercice 22. $P(\tan\alpha)=Q\Big(\dfrac{1}{\cos\alpha}\Big)$

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\,\alpha\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ P(\tan\alpha)=Q\Big(\dfrac{1}{\cos\alpha}\Big)$?

Exercice 23. $X^n+1/X^n=P_n(X+1/X)$

1) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n\in\mathbb{Z}[X]$ vérifiant :

$$\forall\,z\in\mathbb{C}^*,\ z^n+z^{-n}=P_n(z+z^{-1}).$$

2) Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.

3) Pour $P\in\mathbb{C}[X]$, on note $\tilde P$ le polynôme tel que :

$$\forall\,z\in\mathbb{C}^*,\ P(z)+P(z^{-1})=\tilde P(z+z^{-1}).$$

Étudier l'application $P\mapsto\tilde P$.

Exercice 24. *Polytechnique MP* 2000*

1) Donner un isomorphisme f entre $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Montrer que $\sigma : \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow \quad \mathbb{C}^{n+1} \\ (a_0,\dots,a_n) & \longmapsto \quad (a_n,a_0,\dots,a_{n-1}) \end{cases}$ est linéaire.

3) Si $P,Q\in\mathbb{C}[X]$, on définit le produit $\overline{PQ}$ comme le reste de la division euclidienne de PQ par $X^{n+1}-1$. Montrer que l'application induite par σ sur $\mathbb{C}_n[X]$ (c'est-à-dire $f\circ\sigma\circ f^{-1}$) est l'application qui à P associe $\overline{XP}$.

4) Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^{n+1}$ stable par σ.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(F)=\{\overline{RQ},\ R\in\mathbb{C}_n[X]\}$.

Exercice 25. *Centrale MP 2002*
Déterminer tous les polynômes P tels que $P(\mathbb{C})\subset\mathbb{R}$ puis tels que $P(\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$ et enfin tels que $P(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$.

Exercice 26. *Polytechnique MP 2002*
Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}$ distincts et $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{C}$. Trouver $E=\{P\in\mathbb{C}[X]\text{ tq }\forall\,i,\ P^{-1}(\{y_i\})=\{x_i\}\}$.

Exercice 27. *ENS Ulm MP 2002*
Soit $S\subset\mathbb{N}$ fini et $P=\sum_{s\in S}a_sX^s\in\mathbb{C}[X]$.

1) On suppose que les a_s sont réels. Montrer que P a moins de racines strictement positives distinctes que la suite (a_s) n'a de changement de signe.

2) On suppose que P vérifie : $\forall\,s\in S,\ P(s)=0$. Montrer que P est nul.

Exercice 28. $\sum_{k=1}^{100}\dfrac{k}{x-k}\geqslant 1$, *Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003*

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sum_{k=1}^{100}\dfrac{k}{x-k}\geqslant 1$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Exercice 29. *Polynôme positif, Ens Ulm MP* 2003*
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer :
$(\forall\,x\geqslant 0,\ P(x)>0)\Leftrightarrow(\exists\,\ell\in\mathbb{N}\text{ tq }(X+1)^\ell P(X)$ est à coefficients strictement positifs$)$.

Exercice 30. *Diviseurs premiers de la suite $(P(n))$, Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003*
Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ non constant et E l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un $P(n)$, $n\in\mathbb{Z}$. Montrer que E est infini.

Exercice 31. *Centrale MP 2004*
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer l'existence de $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $1+X-P_n^2$ est divisible par X^n.

Exercice 32. *Polynômes à coefficients entiers, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004*
On donne un entier $n\geqslant 0$.
Montrer qu'il existe des polynômes $P_0,\dots,P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que $\forall\,i,j\in[\![0,n]\!],\ \int_{t=0}^{1}t^iP_j(t)\,\mathrm{d}t=\delta_{ij}$.

solutions

Exercice 4.
$P(X) = -1 + Q(X) \times (X-1)^n \Leftrightarrow (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n - 2 \Leftrightarrow X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n - 2$.

Soit $2 = A(X)(X-2)^n + X^n B(X)$ la division suivant les puissances croissantes de 2 par $(X-2)^n$ à l'ordre n. On obtient $X^n \mid Q(X-1) - A(X)$ soit $Q(X) = A(X+1) + X^n R(X)$ et $\deg(P) < 2n \Leftrightarrow R = 0$.

Calcul de $A(X)$ par développement limité : $\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} x^k + O(x^n)$ donc :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-n}{k} \frac{(-1)^k X^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} (-1)^n \frac{X^k}{2^{n+k-1}}$$

Exercice 6.
$\mathrm{vect}(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ contient $P, \Delta P, \Delta^2 P, \dots, \Delta^n P$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ d'après le thm des degrés étagés.

Exercice 7.
Déjà il est nécessaire que $k = n$. Supposant ceci réalisé, la matrice de $(P_0, \dots, P_k)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ est équivalente à la matrice de Vandermonde de $z_0, \dots, z_k$. Donc une CNS est : $k = n$ et $z_0, \dots, z_k$ sont distincts.

Exercice 8.
1) $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
2) $P(z) = z^2 + 3z + 1 \Rightarrow z = -1, -1, -2 \pm i$.

Exercice 10.
$\operatorname{Ker} \Phi = \mathbb{K}_0[X]$, $\operatorname{Im} \Phi = (X-a)\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Exercice 12.
Formule de Taylor : $\dfrac{P^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 13.
2) Appliquer le **1)** à $P(X+k)$.

Exercice 16.
$\begin{cases} P = a(X^2+1) + bX + c \\ Q = a'(X^2+1) + b'X + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \cos\theta(X^2-1) + 2X\sin\theta \\ Q = \sin\theta(X^2-1) - 2X\cos\theta. \end{cases}$
$P \wedge Q = 1$ car $\pm i$ ne sont pas racines de P et Q.

Exercice 17.
$\deg P < 2 \Rightarrow P \in \{1, X, X+1\}$.

Exercice 18.
1) isomorphisme $P \mapsto P(X) + P(X+1)$.
2) $P_n' = nP_{n-1}$.
3) $P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$ (Taylor).
4) $Q_n(X) = P_n(1-X) \Rightarrow Q_n(X) + Q_n(X+1) = 2(-1)^n X^n$.

Exercice 19.
1) Bezout généralisé.
3) $((1-X)P' - nP)(1-X)^{n-1} + (nQ + XQ')X^{n-1} = 0$.
4) $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$.

Exercice 21.

$Q = P + P' + P'' + \dots$: $Q(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha)$ soit minimal. Alors $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) \Rightarrow \min Q \geqslant 0$.

Exercice 22.

oui ssi P est pair.

Exercice 23.

1) $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.

2) $u_k = 2\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, $k = 0, \dots, n-1$.

Exercice 24.

3) trivialement vrai ou trivialement faux selon le choix qu'on a fait en **1**.

4) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$. On a $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}[X]\}$ de manière évidente, donc F_Q est stable par la multiplication modulaire par X.

Soit réciproquement F un sev de $\mathbb{C}_n[X]$ stable par la multiplication modulaire par X. Si $(P_1, \dots, P_k)$ est une famille génératrice de F alors $Q = \text{pgcd}(P_1, \dots, P_k) \in F$ d'après la relation de Bézout et la stabilité de F donc $F_Q \subset F$ et $P_i \in F_Q$ puisque Q divise P_i d'où $F \subset F_Q$ et $F = F_Q$.

Exercice 25.

Tout polynôme à coefficients complexes non constant est surjectif sur $\mathbb{C}$ donc $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow P = a$ (constante réelle).

On a par interpolation de Lagrange : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.

Montrons que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Leftrightarrow P = aX + b$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$: la condition est clairement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un polynôme éventuel P de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. On sait déjà que P est à coefficients rationnels, soit : $P = \frac{1}{d}(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n)$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Soit π un nombre premier ne divisant ni a_n ni d, et $x = p/q$ (forme irréductible) un rationnel tel que $P(x) = 1/\pi$. On a donc : $\pi(a_0q^n + \dots + a_np^n) = dq^n$ ce qui implique que π divise q. Il vient alors : $a_np^n = dq^n/\pi - a_0q^n - \dots - a_{n-1}qp^{n-1}$ ce qui est impossible puisque π est facteur du second membre ($n \geqslant 2$) mais pas du premier ($p \wedge q = 1$).

Exercice 26.

Clairement $E = \varnothing$ si les y_i ne sont pas distincts. Si $y_1, \dots, y_n$ sont distincts, soit $P \in E$, $n = \deg(P)$ et λ le coefficient dominant de P ($P \neq 0$ car $P^{-1}(\{y_i\})$ est un singleton). Alors $P(X) - y_i$ a pour seule racine x_i donc $P(X) - y_i = \lambda(X - x_i)^n$. Pour $n = 1$ on obtient $P(X) = y_1 + \lambda(X - x_1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \geqslant 2$ on obtient $y_2 - y_1 = \lambda(X - x_1)^n - \lambda(X - x_2)^n = n\lambda X^{n-1}(x_2 - x_1) + \dots$ ce qui est impossible donc $E = \varnothing$.

Exercice 27.

1) Récurrence sur card(S) en mettant le terme de plus bas degré en facteur et en dérivant le quotient.

2) Appliquer la question précédente aux suites $(\Re(a_s))$ et $(\Im(a_s))$.

Exercice 28.

Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \dfrac{k}{x-k}$. f est strictement décroissante de 0 à $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$, de $+\infty$ à $-\infty$ sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $1 \leqslant k \leqslant 100$ et de $+\infty$ à 0 sur $]100, +\infty[$. Donc il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{100}$ avec $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{99} < 100 < \alpha_{100}$ tels que $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \geqslant 1\} = \bigcup_{k=1}^{100}]k, \alpha_k]$. La somme des longueurs est $L = \sum_{k=1}^{100} \alpha_k - \sum_{k=1}^{100} k$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{100}$ sont les racines du polynôme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{100}(X - k) - \sum_{k=1}^{100} k \prod_{i\neq k}(X - i) = X^{100} - 2X^{99}\sum_{k=1}^{100} k + \dots$$

D'où $\sum_{k=1}^{100} \alpha_k = 2\sum_{k=1}^{100} k$ et $L = \sum_{k=1}^{100} k = 5050$.

Exercice 29.

Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Pour le sens $\Rightarrow$, il suffit de vérifier la propriété lorsque P est irréductible, strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, et le seul cas non trivial est celui où P est de la forme : $P = (X-a)^2 + b^2$ avec $a > 0$, $b > 0$. Dans ce cas, le coefficient de X^k dans $(X+1)^\ell P(X)$ est : $\binom{\ell}{k}(a^2+b^2) - 2a\binom{\ell}{k-1} + \binom{\ell}{k-2}$, en convenant que $\binom{x}{y}$ vaut 0 si l'on n'a pas $0 \leqslant y \leqslant x$. En mettant ce qui peut l'être en facteur et en ordonnant le reste suivant les puissances de k, on est rammené à montrer que la quantité :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1) - k((a^2+b^2)(2\ell+3) + 2a(\ell+2)+1) + \ell^2(a^2+b^2)$$

est strictement positive pour tout $k \in [\![0, \ell+2]\!]$ si ℓ est choisi convenablement. Or le discriminant par rapport à k est équivalent à $-4\ell^2(2a+1)$ lorsque ℓ tend vers $+\infty$ donc un tel choix de ℓ est possible.

Exercice 30.

On suppose E fini et on montre que P est constant : en supposant č $\neq 0$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Soit $N = \prod_{p\in E} p^{1+v_p(P(a))}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(a+kN) \equiv P(a) \pmod N$ (formule de Taylor), donc $v_p(P(a+kN)) = v_p(P(a))$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $p \in E$. Comme $P(a+kN)$ est produit d'éléments de E, on en déduit que $P(a+kN) = \pm P(a)$ pour tout k, donc P prend une infinité de fois la même valeur.

Exercice 31.

Prendre pour P_n la partie régulière du développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 32.

Analyse : on pose $P_j = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ et on considère la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{a_0}{X} + \frac{a_1}{X+1} + \ldots + \frac{a_n}{X+n} = \frac{P(X)}{X(X+1)\ldots(X+n)}.$$

Alors $\displaystyle\int_{t=0}^{1} t^i P_j(t)\,\mathrm{d}t = F(i+1) = \frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$ donc $P(j+1) = \dfrac{(j+n+1)!}{j!}$ et $P(k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{j+1\}$, soit

$$P(X) = \frac{(j+n+1)!}{j!} \prod_{k\neq j+1} \frac{X-k}{j+1-k} = (-1)^{n-j}\frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!} \prod_{k\neq j+1}(X-k) = Q_j(X).$$

Synthèse : soit Q_j le polynôme ci-dessus et $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{Q_j(X)}{X(X+1)\ldots(X+n)}$. On doit juste vérifier que les a_i sont entiers. Calcul :

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!} \\
&= (-1)^{i+j}\frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!} \\
&= (-1)^{i+j}\binom{i+j}{i}\binom{i+n+1}{i+j+1}\binom{j+n+1}{j}\binom{n}{i}(n+1) \\
&\in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$