

division suivant les puissances croissantes

Exercice 1. *Division de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$*

- 1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^3 - 1$ par $X^2 + 1$ à l'ordre 3.
- 2) En déduire une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^4(x^2 + 1)}$.

Exercice 2. *Division de 1 par $(1 - X)^2$*

- 1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de 1 par $(1 - X)^2$ à un ordre n quelconque.
- 2) En déduire $1 + 2 \cos \theta + 3 \cos 2\theta + \dots + n \cos(n - 1)\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. *Division de $1 - X^2$ par $1 - 2X \cos \theta + X^2$*

- 1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $1 - X^2$ par $1 - 2X \cos \theta + X^2$ à un ordre quelconque.
- 2) En déduire la valeur de $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta$ pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Exercice 4. *Coefficients de Bézout*

Soient $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$.

- 1) Vérifier que P et Q sont premiers entre eux.
- 2) Trouver $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$ (utiliser une division suivant les puissances croissantes).

solutions

Exercice 1.

1) $X^3 - 1 = (X^2 + 1)(X^3 + X^2 - 1) - X^4(X + 1).$

2) $F(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) - \arctan x + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}.$

Exercice 2.

1) $1 = (1 - X)^2(1 + 2X + 3X^2 + \dots + nX^{n-1}) + (n + 1)X^n - nX^{n+1}.$

2) $= \frac{-n \cos n\theta + (n + 1) \cos(n - 1)\theta - \cos \theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$

Exercice 3.

1) $1 - X^2 = (1 - 2X \cos \theta + X^2)(1 + 2X \cos \theta + \dots + 2X^n \cos n\theta) + 2X^{n+1} \cos(n + 1)\theta - 2X^{n+2} \cos n\theta.$

2) $= \frac{\cos n\theta - \cos(n + 1)\theta}{1 - \cos \theta}.$

Exercice 4.

2) Division de 1 par $P \Rightarrow U = 1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4, V = -1 + X^2 + X^3 + X^4.$