Fractions rationnelles

Décomposition en éléments simples

Exercice 1. *Éléments de 1ère espèce*
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{1}{(x^2-1)^5}$ **2)** $\dfrac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}$ **3)** $\dfrac{x^3+x+1}{x^4(x-1)^3}$ **4)** $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^2(x-1)^2}$ **5)** $\dfrac{x^2}{(x^2-1)^2}$ **6)** $\dfrac{1}{(x^2-1)^n}$ **7)** $\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$
8) $\dfrac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}$

Exercice 2. x^2+1
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ **2)** $\dfrac{x}{(x^4-1)^2}$ **3)** $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}$ **4)** $\dfrac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2}$ **5)** $\dfrac{x^6}{(x^2+1)(x-1)^3}$ **6)** $\dfrac{x^{2n}}{(x^2+1)^n}$

Exercice 3. x^2+x+1
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$ **2)** $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$ **3)** $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2}$ **4)** $\dfrac{3x^5-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^6}$

Exercice 4. *autres éléments de 2ème espèce*
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{x^8}{x^6-1}$ **2)** $\dfrac{1}{x^4+1}$ **3)** $\dfrac{x}{x^4+1}$ **4)** $\dfrac{1}{x^5+1}$ **5)** $\dfrac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1}$, $\alpha\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi)$
6) $\dfrac{1}{(x^2+2x+1)(x^3-1)}$.

Exercice 5. *racines de l'unité*
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{x^n+1}{x^n-1}$ **2)** $\dfrac{1}{x^n-1}$ **3)** $\dfrac{nx^{n-1}}{x^n-1}$ **4)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{nx^{n-1}}{x^n-1}\right)$

Exercice 6. *polynômes de Tchebychev*
Décomposer en éléments simples les fractions suivantes
1) $\dfrac{1}{\cos(n\arccos x)}$ **2)** $\tan(n\arctan x)$

Exercice 7. *Calcul de dérivées*
Calculer les dérivées p-èmes des fractions suivantes :
1) $\dfrac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$. **2)** $\dfrac{1}{X^2-2X\cos\alpha+1}$ $(\alpha\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi))$. **3)** $\dfrac{1}{X^2-2X\,\mathrm{sh}\,\alpha-1}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

Exercice 8. *Sommation de séries*
A l'aide de décomposition en éléments simples, calculer :
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

Exercice 9. *Partie polaire pour un pôle d'ordre 2*
Soit $F(X)=\dfrac{1}{R(X)}=\dfrac{1}{(X-a)^2Q(X)}$ avec $Q(a)\neq 0$. Chercher la partie polaire de F en a en fonction de Q puis en fonction de R.

Exercice 10.
Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $P = (X-a_1)\dots(X-a_n)$.
1) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{(1+X^2)^n}{P^2}$.
2) Montrer que les coefficients des $\dfrac{1}{X-a_i}$ sont tous nuls si et seulement si :

$$(1+X^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0.$$

Exercice 11. *P à racines x_i simples $\Rightarrow \sum x_i^k/P'(x_i) = 0$*
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ($n \geqslant 2$) ayant n racines distinctes : $x_1,\dots,x_n$.
1) Démontrer que $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{P'(x_i)} = 0$.
2) Calculer $\sum_{i=1}^n \dfrac{x_i^k}{P'(x_i)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 12. *Les racines de P' sont des barycentres des racines de P*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1,x_2,\dots,x_n$ avec les multiplicités $m_1,m_2,\dots,m_n$.
1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$.
2) En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1,\dots,x_n$.

Exercice 13. *$F'(X)/F(X) = \dots$*
Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$. Existe-t-il $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que : $\dfrac{F'(X)}{F(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \dfrac{\alpha_k}{X-a_k}$?

Exercice 14. *$F(X+1) - F(X) = \dots$*
Trouver les fractions $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que : $F(X+1) - F(X) = \dfrac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Exercice 15. *Inversion de la matrice $(1/(a_i - b_j))$*
Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$, et c des scalaires distincts. On note A la matrice carrée de coefficient général $1/(a_i - b_j)$ et B la matrice colonne de coefficient général $1/(a_i - c)$. Montrer que l'équation $AX = B$ possède une solution unique en considérant une fraction rationnelle bien choisie.

Exercice 16. *Racines de $(X^2+1)PP' + X(P^2+P'^2)$*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant n racines distinctes, positives.
Factoriser le polynôme $Q = (X^2+1)PP' + X(P^2+P'^2)$ en deux termes, faire apparaître $\dfrac{P'}{P}$, et démontrer que Q admet au moins $2n-2$ racines positives.

Exercice 17. *Inégalité*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et $Q(X) = X(X-1)\dots(X-n)$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^n \dfrac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}$ et en déduire l'existence de $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

Propriétés algébriques

Exercice 18. *Substitution de fractions*
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ non constante et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$.
1) Montrer que $P \circ F \neq 0$.
2) Montrer que l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ G & \longmapsto & G \circ F \end{array}\right.$ est un morphisme injectif d'algèbre.
3) A quelle condition est-il surjectif ?
4) Montrer que tous les isomorphismes de corps de $\mathbb{K}(X)$ sont de cette forme.

Exercice 19. *Multiplicité des pôles*
Soient $F, G_0, \ldots, G_{n-1} \in \mathbb{K}(X)$ telles que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \ldots + G_0 = 0$. Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des G_i.

Exercice 20. *Ensemble image d'une fonction rationelle*
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Étudier $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\})$.

Exercice 21. *$F \circ G$ est un polynôme*
Trouver tous les couples $(F, G) \in (\mathbb{C}(X))^2$ tels que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utiliser l'exercice **20**).

Exercice 22. *Fractions invariantes*
1) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Montrer qu'il existe une unique fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.
2) Application : Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{X + e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}$.

Exercice 23. *Fractions invariantes*
Soit $H = \{F \in \mathbb{K}(X) \text{ tel que } F(X) = F(1/X)\}$.
1) Montrer que : $F \in H \Leftrightarrow \exists\, G \in \mathbb{K}(X)$ tel que $F(X) = G(X + 1/X)$.
2) Montrer que H est un sous-corps de $\mathbb{K}(X)$.
3) Que vaut $\dim_H(\mathbb{K}(X))$? Donner une base de $\mathbb{K}(X)$ sur H.

Exercice 24. *Formule de Taylor*
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ définie en $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que il existe une fraction G_n définie en a telle que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \ldots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

Exercice 25. *Dérivée de $1/(x^2+1)$*
Soit $F = \dfrac{1}{X^2+1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \dfrac{P_n}{(X^2+1)^n}$.
Montrer que les racines de P_n sont réelles et simples.

Exercice 26. *Fractions de degré négatif*
Soit $A = \{F \in \mathbb{K}(X) \text{ tels que } \deg F \leqslant 0\}$. Démontrer que A est une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$. Chercher ses idéaux.

solutions

Exercice 1.

1) $\frac{1/32}{(x-1)^5} - \frac{5/64}{(x-1)^4} + \frac{15/128}{(x-1)^3} - \frac{35/256}{(x-1)^2} + \frac{35/256}{x-1} - \frac{1/32}{(x+1)^5} - \frac{5/64}{(x+1)^4} - \frac{15/128}{(x+1)^3} - \frac{35/256}{(x+1)^2} - \frac{35/256}{x+1}$

2) $\frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$

3) $-\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^2} - \frac{17}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{17}{x-1}$

4) $1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

5) $\frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/4}{x+1}$

6) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k}} \left(\frac{(-1)^k}{(x-1)^{n-k}} + \frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-k}} \right)$

7) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n \binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k}} \left(\frac{i^{n+k}}{(x-i)^{n-k}} + \frac{(-i)^{n+k}}{(x+i)^{n-k}} \right)$

8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} k \binom{n}{k}}{x+k}$

Exercice 2.

1) $\frac{-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$

2) $\frac{1/16}{(x-1)^2} - \frac{1/8}{x-1} - \frac{1/16}{(x+1)^2} - \frac{1/8}{x+1} + \frac{x/4}{(x^2+1)^2} + \frac{x/4}{x^2+1}$

3) $\frac{1/4}{x-1} + \frac{1-x}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)}$

4) $1 + \frac{1/4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x/2}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1/4}{x^2+1}$

5) $x + 3 + \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1/2}{(x-1)^3} + \frac{5/2}{(x-1)^5} + \frac{19/4}{x-1}$

6) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(x^2+1)^k}$

Exercice 3.

1) $\frac{1/2}{x^2-x+1} - \frac{1/2}{x^2+x+1}$

2) $1 + \frac{x/2}{x^2+x+1} - \frac{x/2}{x^2-x+1}$

3) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+2}{x^2+x+1}$

4) $-\frac{23x+6}{(x^2+x+1)^6} + \frac{13x+18}{(x^2+x+1)^5} + \frac{3x-11}{(x^2+x+1)^4}$

Exercice 4.

1) $x^2+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)$

2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$

3) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$

4) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{\alpha x-2}{x^2-\alpha x+1}-\dfrac{\beta x-2}{x^2-\beta x+1}\right)$ avec $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5) $\dfrac{1}{4\cos(\alpha/2)}\left(\dfrac{x}{x^2-2x\cos(\alpha/2)+1}-\dfrac{x}{x^2+2x\cos(\alpha/2)+1}\right)$

6) $\dfrac{-1/2}{(x+1)^2}+\dfrac{-3/4}{x+1}+\dfrac{1/12}{x-1}+\dfrac{1/3}{x-j}+\dfrac{1/3}{x-j^2}=\dfrac{-1/2}{(x+1)^2}+\dfrac{-3/4}{x+1}+\dfrac{1/12}{x-1}+\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$.

Exercice 5.

1) $1+2\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}$, $\omega=e^{2i\pi/n}$

2) $\sum_{2k\neq n}\dfrac{2x\cos\alpha_k-2}{n(x^2-2x\cos\alpha_k+1)}+\dfrac{1}{n(x-1)}-\dfrac{(n\text{ pair ?})}{n(x+1)}$, $\alpha_k=2k\pi/n$

3) $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x-\omega^k}$, $\omega=e^{2i\pi/n}$

4) $\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{-1}{(x-\omega^k)^2}$, $\omega=e^{2i\pi/n}$

Exercice 6.

1) $\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k\sin\beta_k}{x-\cos\beta_k}\right)$, $\beta_k=(2k+1)\pi/2n$

2) $\dfrac{1}{n}\left(\sum_{2k\neq n-1}\dfrac{1}{\cos^2\beta_k(\tan\beta_k-x)}\right)+(n\text{ pair ?})\dfrac{x}{n}$, $\beta_k=(2k+1)\pi/2n$

Exercice 7.

1) $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{k+p}p!}{k!\,(n-k)!\,(X+k)^{p+1}}$.

2) $\dfrac{(-1)^p p!}{2i\sin\alpha}\left(\dfrac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}}-\dfrac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}}\right)=\dfrac{\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}\,p!\,(-1)^k\dfrac{\sin(p+1-k)\alpha}{\sin\alpha}X^k}{(X^2-2X\cos\alpha+1)^{p+1}}$.

3) $\dfrac{\sum_{k\text{ pair}}\binom{p+1}{k}\,p!\,(-1)^{p+1}\dfrac{\operatorname{sh}k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k}+\sum_{k\text{ impair}}\binom{p+1}{k}\,p!\,(-1)^{p}\dfrac{\operatorname{ch}k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k}}{(X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1)^{p+1}}$.

Exercice 8.

1) 1.
2) 1/4.
3) 1/2.

Exercice 9.

$\dfrac{1}{Q(a)(X-a)^2}-\dfrac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)}=\dfrac{2}{R''(a)(X-a)^2}-\dfrac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}$.

Exercice 10.

1) $\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{(1+a_i^2)^n}{P'^2(a_i)(X-a_i)^2}+\dfrac{2na_i-P''(a_i)(1+a_i^2)/P'(a_i)}{P'^2(a_i)(X-a_i)}\right)$.

Exercice 11.

1) Décomposer $1/P$ en éléments simples, et prendre $x\to\infty$.
2) Idem avec $X^k/P\Rightarrow\sum=0$ si $0\leqslant k<n-1$, 1 si $k=n-1$.

Exercice 12.

1) $P' = \sum_{i=1}^n \dfrac{m_i P}{X - x_i} \Rightarrow \dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \dfrac{m_i}{X - x_i}$.

2) $P'(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \dfrac{\overline{z - x_i}}{|z - x_i|^2} = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{Bar}(x_i, m_i/|z - x_i|^2)$.

Exercice 14.

$F(X+1) - F(X) = \dfrac{2}{X-1} - \dfrac{3}{X} + \dfrac{1}{X+1} \Rightarrow F(X) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{2}{X-1} + \text{cste}$.

Exercice 15.

$F = \sum_{j=1}^n \dfrac{x_j}{X - b_j} - \dfrac{1}{X - c} = \lambda \dfrac{\prod(X - a_i)}{(X - c)\prod(X - bj)}$ où $\lambda = -\prod \dfrac{c - b_i}{c - a_i}$.

Exercice 16.

$Q = (XP + P')(XP' + P) = XP^2 \left(X + \dfrac{P'}{P}\right)\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{P'}{P}\right)$.

$\dfrac{P'}{P} = \sum \dfrac{1}{X - a_i}$, donc les expressions : $x + \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ changent de signe entre a_i et a_{i+1}.

Cela fait au moins $2n - 3$ racines distinctes ($2n - 2$ si 1 n'est pas racine), plus encore une racine pour $\dfrac{1}{x} + \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ entre 0 et a_1.

Exercice 17.

$\dfrac{P}{Q} = \sum_{k=0}^n \dfrac{P(k)}{(X - k)\prod_{i \neq k}(k - i)}$ donc $\sum_{k=0}^n \dfrac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k - i)} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{xP(x)}{Q(x)} = 1$.

Si l'on suppose $|P(k)| < \dfrac{n!}{2^n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ alors $\left|\sum_{k=0}^n \dfrac{P(k)}{\prod_{i \neq k}(k - i)}\right| < \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \dfrac{n!}{k!\,(n-k)} = 1$, contradiction.

Exercice 18.

3) ssi $\exists G \in \mathbb{K}(X)$ tel que $G \circ F = X \Rightarrow P \circ F = X(Q \circ F)$. $F = \dfrac{A}{B}$, $A \wedge B = 1 \Rightarrow A \mid (p_0 - Xq_0)$ et $B \mid (p_n - Xq_n) \Rightarrow F$ est homographique.

4) $F = \varphi(X)$.

Exercice 20.

$F = \dfrac{P}{Q}$. Si $P = \lambda Q$: $\mathrm{Im}\, F = \{\lambda\}$. Si $P = \lambda Q + \mu$: $\mathrm{Im}\, F = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$. Sinon, $\mathrm{Im}\, F = \mathbb{C}$.

Exercice 21.

1) $G = \text{cste}$.

2) F a un seul pôle $a \Rightarrow F = \dfrac{P}{(X - a)^k}$ et $G = a + \dfrac{1}{Q}$ avec $\deg P \leqslant k$.

3) $F \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow G \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 22.

2) $n\dfrac{X^n + 1}{X^n - 1}$.

Exercice 23.

1) $\Rightarrow \dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{P(1/X)}{Q(1/X)} = \dfrac{P(X) + P(1/X)}{Q(X) + Q(1/X)}$.

Exercice 26.

$I_k = \{F \text{ tels que } \deg F \leqslant -k\}$.