Division euclidienne

Exercice 1. *Décomposition en puissances croissantes*
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ de degré > 0. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ uniques vérifiant :

$$\begin{cases} \deg P_i < \deg A \\ P = P_0 + P_1 A + \ldots + P_n A^n. \end{cases}$$

Exercice 2. *Linéarité du reste et du quotient*
Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$. On considère les applications :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & R \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{cases} \qquad \text{avec } P = QB + R.$$

1) Montrer que Φ et Ψ sont linéaires. Chercher leurs noyaux et leurs images.
2) Montrer que $\Phi(P_1 P_2) = \Phi(\Phi(P_1)\Phi(P_2))$.

Exercice 3. *Endomorphisme $P \mapsto AP$ mod B*
Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$ et $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & \text{reste de la div. euclid. de } AP \text{ par } B. \end{cases}$
Chercher $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 4. *Congruences*
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.
1) Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?
2) Trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 5. *Congruences*
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ divisibles par $X + 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $X + 2, X + 3, X + 4$ sont égaux.

Exercice 6. *Calcul de pgcd*
Calculer le pgcd de P et Q pour :
1) $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$, $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.
2) $P = X^4 - 10X^2 + 1$, $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.
3) $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$, $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$.

Exercice 7. *Coefficients de Bézout*
Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.
1) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$, $Q = X^2 + X + 1$.
2) $P = X^3 + X^2 + 1$, $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 8. *Division de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$*
Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 9. *Ensi P 90*
Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1 + X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 10. *Division de* $(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$ *par* $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$.

1) Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.

2) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est Q_2-Q_1.

3) Montrer que ce quotient est égal à :

$$((X-2)^{2n-2}-(X-2)^{2n-3}+\ldots-(X-2)+1)+((X-1)^{n-2}+(X-1)^{n-3}+\ldots+(X-1)+1).$$

Exercice 11. *Calcul de restes*

Trouver les restes des divisions euclidiennes :

1) de X^{50} par X^2-3X+2.

2) de $(X+\sqrt{3})^{17}$ par X^2+1.

3) de X^8-32X^2+48 par $(X-\sqrt{2})^3$.

Exercice 12. *Divisibilité*

Trouver $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ tels que X^2+X+1 divise $X^5+\lambda X^3+\mu X^2+1$.

Exercice 13. *Congruences*

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que les restes des divisions de P par X^2+1 et X^2-1 valent respectivement $2X-2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par X^4-1 ?

Exercice 14. $\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$

Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Chercher $\mathrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)$.

Exercice 15. *Degré minimal dans la formule de Bézout*

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ non nuls et $D=\mathrm{pgcd}(P,Q)$.

1) Démontrer qu'il existe $U,V\in\mathbb{K}[X]$ uniques tels que : $\begin{cases} UP+VQ=D\\ \deg U<\deg Q-\deg D\\ \deg V<\deg P-\deg D.\end{cases}$

2) Montrer que la méthode des divisions euclidiennes fournit U et V.

Exercice 16. *Application* $(U,V)\mapsto UA+VB$

Soient $A,B\in\mathbb{K}[X]$, $p=\deg A$, $q=\deg B$. On considère l'application :

$$\varPhi:\begin{cases}\mathbb{K}_{q-1}[X]\times\mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X]\\ (U,V) & \longmapsto & UA+VB.\end{cases}$$

Démontrer que : $A\wedge B=1\Leftrightarrow\varPhi$ est bijective.

Exercice 17. $\mathrm{pgcd}(P(X),P(-X))$ *et* $\mathrm{ppcm}(P(X),P(-X))$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique diffrénete de 2 et $P\in\mathbb{K}[X]$. Démontrer que $\mathrm{pgcd}(P(X),P(-X))$ et $\mathrm{ppcm}(P(X),P(-X))$ sont pairs ou impairs.

Exercice 18. $A\circ P\mid B\circ P\Rightarrow A\mid B$

Soient $A,B,P\in\mathbb{K}[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A\circ P$ divise $B\circ P$, alors A divise B.

solutions

Exercice 3.
$\operatorname{Im}\varphi = \{P \in E \text{ tel que } X - 1 \mid P\}$, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(X^3 + X^2 + X)$.

Exercice 4.
1) $\dfrac{\alpha(b - X) + \beta(X - a)}{b - a}$.
2) $\cos n\theta + X \sin n\theta$.

Exercice 5.
$P = \lambda((X + 2)(X + 3)(X + 4) - 6)$.

Exercice 6.
1) $X + 1$
2) 1
3) $X^2 - iX + 1$

Exercice 7.
1) $7U = X + 3$, $7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$.
2) $3U = 2X^2 - X + 1$, $3V = -2X^2 - X + 2$.

Exercice 8.
Substituer j à $X \Rightarrow R = \begin{cases} (-1)^n - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ ((-1)^{n+1} - 1)(X + 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ ((-1)^n + 1)X & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Exercice 9.
$n \equiv 0 \pmod 6$.

Exercice 10.
3) Développer le produit.

Exercice 11.
1) $(2^{50} - 1)X + 2 - 2^{50}$.
2) $2^{16}(X - \sqrt{3})$.
3) $192(X - \sqrt{2})^2$.

Exercice 12.
$\lambda = \mu = -1$.

Exercice 13.
$-3X^3 + X^2 - X - 1$.

Exercice 14.
$n = qm + r \Rightarrow X^n - 1 \equiv X^r - 1 \pmod{X^m - 1}$. On applique la méthode des divisions euclidiennes entre n et $m \Rightarrow \operatorname{pgcd} = X^{n \wedge m} - 1$.

Exercice 15.
2) Récurrence.