Suites et fonctions

Exercice 1. *ENS Paris (Mlle Fournis, Dijon)*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ayant un nombre fini de zéros et $\varepsilon > 0$. Existe-t-il une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ayant les mêmes zéros que f et telle que $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$?

Exercice 2. *ENS (Sorci, Dijon)*
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P([0,1]) \subset [0,1]$ et pour toute fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\int_0^1 \varphi = \int_0^1 \varphi \circ P$.

Exercice 3. *ENS (Sorci, Dijon)*
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\cos x) = \cos(P(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Navale (Mlle Beaufils, Dijon)*
Soit $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$ et $g_n(x) = nf_n(x)$. Étudier la convergence des f_n puis des g_n sur $[0, \pi/2]$.

Exercice 5. *Mines (Marc, Dijon)*
Soit (x_n) une suite réelle et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$. On pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$ et on suppose que la suite (y_n) est convergente. Montrer que la suite (x_n) est elle aussi convergente.

Espaces vectoriels normés

Exercice 6. *ENS Paris (Mlle Fournis, Dijon)*
On fixe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$. Deux endomorphismes u, v de $\mathbb{R}^n$ sont dits équivalents s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|\varphi(x)\| = \|x\| \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u(x) = \varphi \circ v(x).$$

On suppose : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|$. u et v sont-ils équivalents ?

Exercice 7. *CCP (Mlle Beaufils, Dijon)*
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $N(x,y) = \max(|x|, |y|, |x-y|)$.
1) Montrer que N est une norme.
2) Dessiner la boule unité.
3) Trouver une norme telle que la boule unité soit un parallélogramme.
4) Soient B_1, B_2 deux boules unités associées aux normes N_1, N_2. Montrer que $(B_1 = B_2) \Rightarrow (N_1 = N_2)$.

Exercice 8. *Centrale (Rochel, Dijon)*
Soit I un intervalle et μ une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions continues sur I. On suppose μ positive (c'est-à dire $\mu(f) \geqslant 0$ pour toute fonction f positive).
1) Prouver que $\mu(|f|) \geqslant |\mu(f)|$ et montrer que μ est continue pour $\| \ \|_\infty$.
2) Prouver que pour toutes fonctions f, g, on a $\mu(fg)^2 \leqslant \mu(f^2)\mu(g^2)$.
3) Prouver que si h est strictement positive, alors $\mu(h) > 0$.

Exercice 9. *Mines (Noblet, Dijon)*
Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et (P_k) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$ convergeant simplement vers une fonction f sur un segment $[a, b]$. Montrer que f est polynomiale et que la convergence est uniforme.

Calcul différentiel

Exercice 10. *CCP (Guérin, Dijon)*

Soit la fonction f définie par $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Établir l'existence de dérivées partielles pour f sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
3) Déterminer la dérivabilité de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $(1,1)$.
4) Montrer de deux manières différentes que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. *ENS Lyon (Mlle Fournis, Dijon)*

Soit $f:\mathbb{R},\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g(x)=f(|x|)/|x|$ pour $x\neq 0$. Peut-on prolonger g en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Séries

Exercice 12. *Mines (Sorci, Dijon)*

Soit (x_n) définie par $x_0>0$ et $x_{n+1}=x_n+1/x_n$. Donner un équivalent de x_n.

Exercice 13. *Mines (Velut, Dijon)*

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $n^\alpha\sum_{k=1}^n k^\beta$.

Exercice 14. *St Cyr (Mlle Beaufils, Dijon)*

Soit $H_n=\sum_{k=1}^n 1/k$ et $S(x)=\sum_{n=1}^\infty H_n x^n$.
1) Montrer $1\leqslant H_n\leqslant n$.
2) En déduire le rayon R de $S(x)$.
3) Calculer $(1-x)S(x)$ pour $-R<x<R$.
4) En déduire l'expression de $S(x)$.

Exercice 15. *Mines (Goepfert, Dijon)*

Soit $S(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n/(x+n)$.
1) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Donner un développement asymptotique à deux termes de $S(x)$ en 0.

Intégration

Exercice 16. *Centrale (Velut, Dijon)*

1) Que peut-on dire de la limite en $+\infty$ d'une fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ intégrable ?
2) Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ décroissante et intégrable. Montrer que $f(x)=o(1/x)$ quand $x\to+\infty$.
3) Soit $f:[1,+\infty[\to[1,+\infty[$ continue croissante. Montrer que si $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln(f(x))}$ est intégrable alors $x\mapsto\dfrac{1}{f(x)}$ l'est aussi.

Exercice 17. *CCP (Velut, Dijon)*

Existence et calcul de $I=\int_{x=0}^1\dfrac{1-3x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}}\arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)dx$.

Exercice 18. *Mines (Mlle Caminade, Dijon)*

Montrer l'existence et calculer la valeur de $I=\int_{x=0}^{+\infty}\dfrac{\sin^3(x)}{x^2}dx$.

Exercice 19. *CCP (Chambard, Dijon)*

1) Justifier l'intégrabilité de $e^x/\sqrt{x^2-4}$ sur $]2,+\infty[$.
2) Justifier l'intégrabilité de $\ln(x)/\sqrt{1+x^{2a}}$ sur $]0,+\infty[$ $(a>0)$.

Exercice 20. *Centrale (Marc, Dijon)*

On pose pour n entier : $I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$ et $J_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) \sin((2n+1)x)\,dx$.

1) Montrer que I_n et J_n sont bien définies.
2) Calculer les 20 premiers termes des suites (I_n) et (J_n) et conjecturer leurs limites.
3) Calculer $I_n - I_{n-1}$ et confirmer la conjecture sur $\lim(I_n)$.
4) Montrer que $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.
5) Conclure quant à la conjecture sur $\lim(J_n)$.
6) Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}\,dx$.

Exercice 21. *CCP (Marc, Dijon)*

On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2) Calculer $\lim_{n\to\infty}(\int_{[0,+\infty[} f_n)$.

Exercice 22. *Mines (Delmaire, Dijon, exercice déjà posé en 2017)*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence et calculer la valeur de $\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\,dt$.

Exercice 23. *Centrale (Goepfert, Dijon)*

1) Rappelez le théorème de Heine.
2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable, décroissante sur $[a, +\infty[$ avec $a \geqslant 0$.
Montrer que $\lim_{t\to 0^+}(t \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)) = \int_0^{+\infty} f$.

Équations différentielles

Exercice 24. *Mines (Guérin, Dijon)*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ avec $a_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
2) A l'aide d'une relation entre a_{n+1} et a_n, montrer que f vérifie l'équation différentielle :
$f'(x) = xf(x) + 1 + x^2 f'(x)$.
3) En déduire l'expression de f.

Exercice 25. *Centrale (Lhenry Corentin, Dijon)*

Soit $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow 4ty'' + 2x' - x = 0$.

1) Que permet d'affirmer Cauchy-linéaire sur les solutions ?
2) Avec Python (en utilisant le module `linalg`), tracer la courbe de la solution φ associée à $t_0 = 1$, $y_0 = e$, $y_0' = e/2$. Faire tracer aussi la courbe de $\ln(\varphi)$.
3) Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$.
4) Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26. *Centrale (Lhenry Félix, Dijon)*

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow xy'' + y' + xy = 0$.

1) Montrer que $F = x \mapsto \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x \sin\theta)\,d\theta$ est solution.
2) Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution développable en série entière.

Exercice 27. *CCP (Noblet, Dijon)*

Soit $\varphi(x) = \cos(x^{3/2})$ si $x \geqslant 0$ et $\varphi(x) = \mathrm{ch}((-x)^{3/2})$ si $x < 0$. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $2xy' + y = 3x\varphi(x)$. Faire tracer approximativement les courbes des solutions.

Algèbre générale

Exercice 28. *ENS Paris (Mlle Fournis, Dijon)*

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe strict de G tel que : $\forall g \in G \setminus H$, $gHg^{-1} \cap H = \{e\}$.

1) Donner le cardinal de $K = (G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}) \cup \{e\}$.

2) On suppose que H possède un élément involutif : $i \in H$ tel que $i \neq e$ et $i^2 = e$. Montrer que pour tout $g \in G \setminus H$, on a $igig^{-1} \in K \setminus \{e\}$. On remarquera que $j = gig^{-1}$ est lui aussi involutif.

Exercice 29. *Mines (Balland, Dijon)*

Soit $P = X^3 - X + 1$.

1) Montrer que P a trois racines complexes distinctes. On les notera a, b, c.

2) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $a^7 + b^7 + c^7$.

Exercice 30. *ENS Lyon (Mlle Fournis, Dijon)*

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n à coefficients entiers vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ P_n(x + 1/x) = x^n + 1/x^n.$$

2) Justifier que P_n est unitaire si $n \geqslant 1$.

3) Décomposer en éléments simples $1/P_n$.

Exercice 31. *Centrale (Merle, Dijon)*

Soit $Q_p = (2p+2)X^{2p+1} - (2p)X^{2p-1} - (2p-1)X^{2p-2} \ldots - 2X - 1$.

1) Avec Python :

a) Écrire une fonction calculant Q_p.

b) Calculer les racines complexes de Q_p pour $p = 3, 4, 5, 10$.

c) Le faire pour $p < 30$ et les afficher sur un dessin comportant aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$. Conjecturer.

d) Faire calculer le maximum des modules des racines.

2) Soit $R_p = X^{2p+1} Q_p(1/X)$. Montrer que R_p possède une unique racine réelle positive ; en déduire la même propriété pour Q_p. On notera α_p la racine positive de Q_p.

3) Vérifier que $Q_p = (2p+2)X^{2p+1} - \dfrac{1 - X^{2p+1}}{(1-X)^2} + \dfrac{(2p+1)X^{2p}}{1-X}$.

En déduire qu'à partir d'un certain rang, $\frac{3}{2} < \alpha_p < 2$.

Exercice 32. *Mines (Sorci, Dijon)*

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ |x| = |y| = |z| = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Exercice 33. *Mines (Mlle Beaufils, Dijon)*

Pour quelles valeurs de n l'application $z \mapsto z^2$ est-elle une bijection de $\mathbb{U}_n$ sur lui-même ?

Exercice 34. *Centrale (Marc, Dijon)*

Soient α, β les racines de $X^2 - X - 1$ et $A = \{x + y\alpha \text{ tq } x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que A est un anneau et que $\sigma : x + y\alpha \mapsto x + y\beta$ est un automorphisme.

2) Montrer que $z \in A^* \Leftrightarrow N(z) = |z\sigma(z)| = 1$.

Exercice 35. *CCP (Delmaire, Dijon)*

Déterminer tous les ponynômes $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$. On pourra étudier les racines d'un tel polynôme.

Exercice 36. *Mines (Lhenry Félix, Dijon)*

Trouver tous les morphismes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Arithmétique

Exercice 37. *ENS Lyon (Mlle Fournis, Dijon)*
Soit $a_n = \operatorname{card}\{d \in [\sqrt{n/2}, \sqrt{2n}[\cap \mathbb{N} \text{ tq } d|n\}$.
1) La suite (a_n) converge-t-elle ?
2) La suite (a_n) est-elle bornée ?

Exercice 38. *ENS Lyon (Mlle Fournis, Dijon)*
Soient a, b, c, d entiers tels que pour tout $n \in n$, $an + c$ et $bn + d$ sont premiers entre eux. Que pouvez-vous dire de a, b, c, d ?

Exercice 39. *Mines (Goepfert, Dijon)*
Soit D_n la somme des diviseurs positifs de n (par exemple $D_6 = 12$). Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $D_{ab} = D_a D_b$.

Exercice 40. *Mines (Goepfert, Dijon, déjà sorti en 2017)*
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels uniquement composés de 1 (ex : $1, 11, 111\ldots$). Trouver l'ensemble des polynômes P tels que $P(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Exercice 41. *Mines (Lhenry Corentin, Dijon)*
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \vee y = 72 \\ x \wedge y = x - y. \end{cases}$

Exercice 42. *ENS (Remond, Dijon)*
Soit n un nombre premier et $\mathcal{T}$ le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$. Pour $i \in [\![2, n-1]\!]$ on considètre le triangle $\mathcal{T}_i$ de sommets $(0,0)$, $(i, n-i)$, $(i-1, n-(i-1))$. Le but de l'exercice est de prouver que le nombre de points à coordonnées entières dans $\mathring{\mathcal{T}_i}$ ne dépend pas de i et de le calculer.
Après une dizaine de minutes où le candidat a fait des essais et tenté de construire un raisonnement analytique, l'examinatrice lui indique :
Si $\mathcal{P}$ est un polygone plan d'aire $\mathcal{A}$ dont les sommets sont à coordonnées entières, alors on a $\mathcal{A} = a + b/2 - 1$ où a est le nombre de points à coordonnées entières dans $\mathring{\mathcal{P}}$ et b le nombre de points à coordonnées entières sur $\mathrm{Fr}(\mathcal{P})$. Résoudre l'exercice en admettant ce théorème, puis démontrer ledit théorème.

Algèbre linéaire

Exercice 43. *Mines (Balland, Dijon)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp(tA)$.

Exercice 44. *Centrale (Merle, Dijon)*
Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et E^* l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{C}$.
Pour $A \in E$ on note $L_A = (T \to \operatorname{tr}(AT)) \in E^*$.
1) Montrer que l'application $A \to L_A$ est un isomorphisme de E sur E^*.
2) Donner les hyperplans de E.
3) Soient $\mathcal{T}_n^+$ et $\mathcal{T}_n^-$ les sev de E constitués des matrices triangulaires supérieures strictes et des matrices triangulaires inférieures strictes. Soit T une matrice triangulaire et $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(L_T)$. Donner les dimensions de $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^+$ et $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^-$.

Exercice 45. *Mines (Mlle Beaufils, Dijon)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Donner les valeurs propres de A.
2) Déterminer la matrice diagonale D semblable à A.
3) Soit M telle que $M + M^3 = 0$. Montrer que M est semblable à D.

Exercice 46. *St Cyr (Mlle Beaufils, Dijon)*

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

2) On considère le système différentiel : $\begin{cases} f'(t) = g(t) + h(t), \\ g'(t) = f(t), \\ h'(t) = f(t) + g(t) + h(t). \end{cases}$

Le mettre sous forme matricielle.

3) Soit $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Donner $Y'(t)$.

4) En déduire $f(t), g(t), h(t)$.

Exercice 47. *Navale (Mlle Beaufils, Dijon)*

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M et M' la matrice ayant pour j-ème colonne $C'_j = \sum_{i \neq j} C_i$. Montrer que l'application $u : M \mapsto M'$ est diagonalisable.

Exercice 48. *Mines (Marc, Dijon)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que tous ses coefficients diagonaux sont nuls et les autres coefficients sont égaux à 1 ou -1. Montrer que A est inversible.

Exercice 49. *Mines (Marc, Dijon)*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 50. *CCP (Marc, Dijon)*

On note pour x réel et n entier, $M_n(x)$ la matrice tridiagonale contenant x sur la diagonale et 1 sur les deux diagonales secondaires. On note $D_n(\theta) = \det(M_n(2\cos\theta))$.

1) Montrer que l'on a $D_{n+2}(\theta) = aD_{n+1}(\theta) + bD_n(\theta)$ avec a, b à préciser.

2) Montrer que $D_n(\theta) = \sin((n+1)\theta)/\sin\theta$. En déduire les valeurs de θ pour lesquelles $D_n(\theta) = 0$.

3) $M_n(x)$ est-elle diagonalisable ?

4) Déterminer les valeurs propres de $M_n(x)$.

Exercice 51. *CCP (Rochel, Dijon)*

Soient E un ev de dimension finie et $v \in \mathcal{L}(E)$. soit f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à u associe $u \circ v$.

1) Montrer que $\mathrm{sp}(f) \subset \mathrm{sp}(v)$.

2) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(v)$ et u une projection sur $\mathrm{Ker}(v - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

a) Prouver que $\mathrm{sp}(f) = \mathrm{sp}(v)$.

b) Prouver que si v est diagonalisable, alors f l'est.
On admettra que $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}) = \dim(E) \dim \mathrm{Ker}(v - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

3) Montrer que f et v ont même polynôme minimal.

4) Prouver la propriété admise en **2b**.

Exercice 52. *Centrale (Rochel, Dijon)*

On donne une focntion Python `Liste(n)` qui donne la liste des listes à n éléments constituées uniquement de 0 et de 1. Soit B_n l'ensemble des matrices M de taille n à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telles que $M^tM = nI_n$. Soit B_n^+ le sous-ensemble des matrices de B_n dont la première ligne et la première colonne ne sont constituées que de 1. Soit enfin D_n l'ensemble des matrices $n \times n$ diagonales dont tous les coefficients diagonaux appartiennent à $\{-1, 1\}$.

1) **a)** Déterminer B_2 et B_3 (la question peut être traitée sans ordinateur, mais l'interrogateur attendait, *sans l'avoir indiqué,* l'usage de la fonction `Liste`).

b) Déterminer B_4^+.

2) Les matrices de B_n sont-elles inversibles ?

3) B_n est-il stable par transposition ?

4) Calculer $\det(M)$ pour $M \in B_n$.

5) Montrer que $M \in B_n$ si et seulement s'il existe $\Delta_1, \Delta_2 \in D_n$ et $A \in B_n^+$ telles que $M = \Delta_1 A \Delta_2$.

Exercice 53. *Mines (Delmaire, Dijon)*

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Comparer $\mathrm{Ker}(N)$ et $\mathrm{Ker}(\exp(N) - I_n)$.

Exercice 54. *Centrale (Lhenry Corentin, Dijon)*
Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. On pose $A_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Soit τ une transposition et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $A_\tau M$ et MA_τ.
2) Montrer que $A_\sigma A_{\sigma'} = A_{\sigma\circ\sigma'}$.

Exercice 55. *Mines (Lhenry Corentin, Dijon)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M_{a,b} \in \mathcal{M}_{2n-1}(\mathbb{R})$ la matrice constituée de a sur la diagonale, de b sur l'anti-diagonale, de $a + b$ au milieu et de zéros partout ailleurs. Déterminer le polynôme minimal de $M_{a,b}$.

Exercice 56. *Mines (Lhenry Félix, Dijon)*
Soit E l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et T l'endomorphisme de E défini par $T(f)(x) = f(px + q)$ où p, q sont deux réels srictement positifs tels que $p + q = 1$.
1) Montrer que les valeurs propres de T appartiennent à $]-1, 1] \setminus \{0\}$.
2) Soit f une fonction propre pour T. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.
3) Déterminer les éléments propres de T.

Algèbre bilinéaire

Exercice 57. *Mines (Guérin, Dijon)*
Soient a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ non nuls et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (a|x)b. \end{cases}$
Déterminer si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Exercice 58. *Mines (Merle, Dijon)*
Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique et $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x)\|^2 - (u(x)|x)^2. \end{cases}$
f est-elle majorée ? minorée ? Dans ce cas donner les bornes de f.

Exercice 59. *CCP (Balland, Dijon)*
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 60. *Mines (Sorci, Dijon)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 61. *Mines (Velut, Dijon)*
Soit u un endomorphisme de E, espace euclidien. Montrer que u est une homothétie si et seulement si u commute avec tout automorphisme orthogonal de E.

Exercice 62. *St Cyr (Mlle Beaufils, Dijon)*
On pose pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(A|B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$.
1) Montrer qu'on a un produit scalaire.
2) En déduire $\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant n \operatorname{tr}({}^tAA)$ et étudier le cas d'égalité.
3) Soit $F = \{M \text{ tq } \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Montrer que c'est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
4) Déterminer $F^\perp$.
5) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Probabilités

Exercice 63. *CCP (Guérin, Dijon)*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes.

– On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

– Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1, sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{6}{35} p_n$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 64. *Mines (Merle, Dijon)*

Cinq personnes se trouvent autour d'une table ronde. Au départ, deux voisins possèdent chacun un ballon. A chaque tour, le possesseur d'un ballon le transmet à son voisin de droite ou de gauche, de manière équiprobable. Étudier la variable aléatoire X donnant le nombre de tours avant que les deux ballons se retrouvent dans les bras d'une même personne (on pourra étudier la distance entre les deux ballons).

Exercice 65. *Centrale (Velut, Dijon)*

On appelle *dérangement* toute permutation n'ayant pas de point fixe. On représente une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ en Python par une liste de longueur n dont le k-ème élément est $\sigma(k)$.

1) Écrire une fonction `derangement` prenant une liste comme argument et retournant le booléen qui dit si cette liste est ou n'est pas un dérangement.

2) Conjecturer avec l'aide de Python la dépendance par rapport à n...

a) de l'espérance du nombre de points fixes ;

b) de la probabilité qu'une permutation aléatoire soit un dérangement.

On choisit une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ au hasard et on note X_k la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $\{\sigma(k) = k\}$. On note aussi N_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de σ et D_n l'évènement $\{\sigma \text{ est un dérangement}\}$.

3) Exprimer N_n et D_n en fonction des X_k. En déduire une démonstration de la conjecture **2a**. Peut-on aussi démontrer ainsi la conjecture **2b** ?

On pose $D_{nk} = (n!)\mathbb{P}(N_n = k)$ et $d_n = D_{n,0}$.

4) Montrer que $D_{nk} = \binom{n}{k} d_{n-k}$. En déduire que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

5) En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer la limite de $d_n/n!$. En déduire la loi de N_n.

Exercice 66. *St Cyr (Mlle Beaufils, Dijon)*

1) Pour $q \in]-1, 1[$, établir la convergence et calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n$.

2) On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un 6. On note X la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers effectués. Si X est pair, on gagne X euros, si X est impair on perd X euros. Y est la variable aléatoire représentant le gain.

a) Écrire une fonction Python `simulX` simulant la variable X. Écrire de même une fonction `simulY`.

b) Donner la loi de X. Donner Y en fonction de X et calculer l'espérance de Y.

Exercice 67. *Mines (Mlle Caminade, Dijon)*

Soient X, Y deux variables aléatoires strictement positives de même loi et indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}(XY) \geqslant 1$.

Exercice 68. *CCP (Mlle Caminade, Dijon)*

Soit une pièce que l'on lance jusqu'à obtenir deux Pile. On obtient Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de Face obtenus avant d'avoir ces deux Pile. Si $X = n \in \mathbb{N}$, on dépose dans une urne $n+1$ boules numérotées de 0 à n et on pioche au hasard l'une de ces boules. Soit Y le numéro de la boule piochée.

1) Donner la loi de X.
2) X admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.
3) Déterminer la loi de Y. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.
4) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 69. *Mines (Noblet, Dijon)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_n \in]0,1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, telles que la loi de X_i est la loi binomiale de paramètres m_i, p_i. On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que la loi de X est binomiale si et seulement si tous les p_i sont égaux.

Géométrie

Informatique

Exercice 70. *ENS Paris (Mlle Fournis, Dijon)*

Soit $u \in \Sigma^*$. On dit que $v \in \Sigma^*$ est un sur-mot de u s'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall i \in \{0, |u| - 1\}, u_i = v_{\psi(i)}.$$

On note $u \leqslant v$ cette relation. Soit L un langage. On note $\overline{L}$ l'ensemble des sur-mots des mots de L.

1) Donner $\overline{L_0}$ et $\overline{L_1}$ pour $L_0 = (ab)^*$ et $L_1 = ab^*a$.
2) Montrer que pour tout langage L, on a $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$.
3) Montrer que si L est régulier alors $\overline{L}$ l'est aussi.
4) Comment pourrait-on calculer la clôture d'un langage L ? Discuter de l'efficacité.
5) On admet le théorème suivant : pour toute suite $(w_n) \in (\Sigma^*)^{\mathbb{N}}$, il existe $i < j$ tels que $w_i \leqslant w_j$. Montrer que pour tout langage L, il existe un langage F fini tel que $\overline{L} = \overline{F}$.
6) En déduire que tout langage clos par sur-mot ($L = \overline{L}$) est régulier.
7) Existe-t-il des langages L qui ne s'écrivent pas $\overline{F}$?
8) Un langage clos par sous-mot est-il régulier ?

solutions

Exercice 1.

Si cela a lieu pour tout $\varepsilon > 0$ alors f est limite uniforme de fonctions polynomiales, donc est continue. La réponse est donc « non en général » pour f discontinue.

Supposons à présent f continue avec pour zéros $x_1, \dots, x_k \in [0,1]$. On peut trouver g, continue affine par morceaux, telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ avec comme contraintes supplémentaires :

– g ne s'annule qu'en $x_1, \dots, x_k$;
– g est dérivable à dérivée non nulle en ces points.

Pour ce faire : choisir une subdivision de $[0,1]$ de pas suffisament petit en évitant les x_i ; interpoler linéairement f entre les points de subdivision et modifier légèrement les hauteurs des points d'interpolation s'il apparaît un segment horizontal indésirable.

Par construction, la fonction $h : x \mapsto g(x)/(x-x_1)\dots(x-x_k)$ est continue et ne s'annule pas sur $(0,1]$. On a alors $\alpha = \min|h| > 0$ par compacité. Soit ensuite q polynomiale telle que $\|h-q\|_\infty \leqslant \min(\alpha/2, \varepsilon/2)$. Par choix de α, on a $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Enfin, posons $p(x) = (x-x_1)\dots(x-x_k)q(x)$: p est polynomiale, s'annule uniquement en $x_1, \dots, x_k$ et on a :

$$\|f-p\|_\infty \leqslant \|f-g\|_\infty + \|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2 + \|x \mapsto (x-x_1)\dots(x-x_k)\|_\infty \|h-q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 2.

Déjà, on peut remplacer l'hypothèse « φ continue » par « φ continue par morceaux ». En effet, une fonction continue par morceaux sur un segment est limite simple de fonctions continues uniformément bornées, et on peut ainsi passer à la limite sous les intégrales par convergence dominée. En particulier, en prenant pour φ la fonction indicatrice d'un intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, on obtient :

$$\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 1,\ \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]} \circ P = b - a.$$

La fonction $\mathbb{1}_{[a,b]} \circ P$ vaut 1 pour les x tels que $a \leqslant P(x) \leqslant b$ et 0 pour les autres. Étant polynomiale, P est monotone par morceaux et l'ensemble des x tels que $a \leqslant P(x) \leqslant b$ est union finie d'intervalles disjoints. La somme des longueurs de ces intervalles vaut donc $b-a$.

On montre alors par l'absurde que P' ne peut s'annuler sur $]0,1[$: si $P'(x_0) = 0$ avec $x \in \,]0,1[$, alors pour $\varepsilon > 0$ on a $\alpha > 0$ tel que $|P'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, donc $|P(x)-P(x_0)| \leqslant \alpha\varepsilon$ pour de tels x. La longueur $2a$ de l'intervale $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ est alors majorée par la longueur de l'intervalle $[P(x_0)-\alpha\varepsilon, P(x_0)+\alpha\varepsilon] \cap [0,1]$ donc est aussi majorée par $2\alpha\varepsilon$. Mais $2\alpha \leqslant 2\alpha\varepsilon$ est intenable si l'on prend $\varepsilon < 1$.

Ainsi, P est strictement monotone sur $[0,1]$ et, quitte à remplacer $P(X)$ par $P(1-X)$, qui vérifie la même propriété que P, on peut supposer P strictement croissante sur $[0,1]$. Pour $[a,b] \subset [0,1]$, l'ensemble des x tels que $a \leqslant P(x) \leqslant b$ est donc réduit à unique intervalle de longueur $b-a$, soit :

$$\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 1,\ P^{-1}(b) - P^{-1}(a) = b - a.$$

Ainsi, la fonction P^{-1} est affine. Par réciproque, P l'est aussi et on conclut facilement que $P = X$.

En conclusion, les polynômes cherchés sont $P = X$ et $P = 1 - X$.

Exercice 3.

Si P est constant : $P = a \in \mathbb{R}$ alors il faut $\cos(a) = a$. Par étude de fonction, cette équation admet une unique racine réelle et le polynôme constant associé convient.

Si $\deg(P) = 1$: $P = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ alors il faut $\cos(ax + b) = a\cos(x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant : $-a\sin(ax + b) = -a\sin(x)$ donc $b \equiv 0 \pmod{2\pi}$. En redérivant, il vient $-a^2\cos(ax) = -a\cos(x)$ pour tout x, donc $a = 1$ en prenant $x = 0$ car $a \neq 0$. Enfin en reportant dans l'équation initiale, on trouve $b = 0$ soit $P = X$ qui convient effectivement.

Supposons à présent $\deg(P) \geqslant 2$. Toujours en dérivant, il vient $-\sin(x)P'(\cos x) = -\sin(P(x))P'(x)$. Comme $P(x)$ et $P'(x)$ ont des limites infinies en $+\infty$, on peut trouver une suite (x_k) tendant vers $+\infty$ telle que $P(x_k) = (k + \frac{1}{2})\pi$ et $|P'(x_k)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Alors $|\sin(x_k)P'(\cos x_k)| = |\sin(P(x_k))P'(x_k)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est impossible car le premier membre est borné. Il n'existe pas de polynôme de degré au moins 2 solution.

Exercice 4.

f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle. $\|f_n\|_\infty = f_n(\alpha_n)$ avec $\tan^2(\alpha_n) = 1/n$ donc $\|f_n\|_\infty \sim 1/\sqrt{en}$. La convergence des f_n est uniforme, celle des g_n ne l'est pas.

Exercice 5.

Si $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|y_k| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant N$. Il vient pour $n \geqslant N$:
$|x_n| = \dfrac{|y_{n-1} - \alpha x_{n-1}|}{\beta} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\beta} + \dfrac{\alpha}{\beta}|x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\beta} + \ldots + \dfrac{\varepsilon\alpha^{n-N-1}}{\beta^{n-N}} + \dfrac{\alpha^{n-N}|x_N|}{\beta^{n-N}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\beta - \alpha} + \dfrac{\alpha^{n-N}|x_N|}{\beta^{n-N}}$.
En particulier, pour n assez grand, $|x_n| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}$ et ainsi, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$: alors $y_n - \ell = \alpha(x_n - \ell') + \beta(x_{n+1} - \ell')$ avec $(\alpha + \beta)\ell' = \ell$. d'après le premier cas, $x_n - \ell' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell'$.

Exercice 6.

Si $\|\ \|$ est une norme euclidienne : soit $(y_1, \ldots, y_k)$ une base orthonormale de $\mathrm{Im}(v)$ et x_i un antécédant de y_i par v. Alors la famille $(u(x_1), \ldots, u(x_k))$ est orthonormale car

$$\begin{aligned}
4(u(x_i)|u(x_j)) &= \|u(x_i) + u(x_j)\|^2 - \|u(x_i) - u(x_j)\|^2 \\
&= \|u(x_i + x_j)\|^2 - \|u(x_i - x_j)\|^2 \\
&= \|v(x_i + x_j)\|^2 - \|v(x_i - x_j)\|^2 \\
&= \|y_i + y_j\|^2 - \|y_i - y_j\|^2 \\
&= 4(y_i|y_j).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $k = \mathrm{rg}(v) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, v) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, u) = \mathrm{rg}(u)$, donc $(u(x_1), \ldots, u(x_k))$ est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(u)$. On complète $(y_1, \ldots, y_k)$ et $(u(x_1), \ldots, u(x_k))$ en deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$ et on choisit $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$ qui envoie la première base sur la deuxième. Par construction, $u = \varphi \circ v$.

Dans le cas non euclidien, le résultat est trivial si v est bijective, et faux dans le cas général. Contre-exemple : $\|\ \| = \|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, $u(x, y) = (x, x)$ et $v(x, y) = (x, 0)$. Un endomorphisme φ tel que $\varphi \circ v = u$ est tel que $\varphi(1, 0) = (1, 1)$ et donc $\mathrm{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors $\|\varphi(x, 1)\|_\infty = \max(|x + a|, |x + b|)$ tandis que $\|(x, 1)\|_\infty = \max(|x|, 1)$. Un tracé des courbes de ces deux quantités en fonction de x montre qu'elles ne peuvent être constamment égales.

Exercice 7.

2) Hexagone de sommets $(1,0),(1,1),(0,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1)$.

3) Les normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ conviennent.

4) $(N_1(x,y) \leqslant 1) \Longleftrightarrow (N_2(x,y) \leqslant 1)$ donc par homogénéïté $(N_1(x,y) \leqslant a) \Longleftrightarrow (N_2(x,y) \leqslant a)$ pour tout $a > 0$. Avec $(x,y) \neq (0,0)$ et $a = N_1(x,y)$ il vient $N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y)$ et par symétrie, il y a égalité. Le cas $(x,y) = (0,0)$ est trivial.

Exercice 8.

1) $|f| - f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(|f|) \geqslant \mu(f)$, et $|f| + f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(|f|) \geqslant -\mu(f)$ d'où $\mu(|f|) \geqslant |\mu(f)|$.

Soit F le sev de E constitué des fonctions continues bornées. On a pour $f \in F$: $|f| \leqslant \|f\|_\infty \mathbb{1}_I$ d'où $|\mu(f)| \leqslant \mu(|f|) \leqslant \|f\|_\infty \mu(\mathbb{1}_I)$. Étant linéaire, μ est alors continue sur F.

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant \mu((f - tg)^2) = \mu(f^2) - 2t\mu(fg) + t^2\mu(g^2)$. Si $\mu(g^2) > 0$, on obtient l'inégalité demandée en considérant le minimum de cette fonction de t, atteint pour $t = \mu(fg)/\mu(g^2)$. Si $\mu(g^2) = 0$, on obtient $\mu(fg) = 0$ en considérant les limites lorsque $t \to \pm\infty$.

3) Faux, on peut avoir $\mu = 0$. Si l'on ajoute l'hypothèse $\mu \neq 0$, soit f telle que $\mu(f) \neq 0$ et $g = f/\sqrt{h}$. Avec la question précédente, on a $0 < \mu(f)^2 = \mu(g\sqrt{h})^2 \leqslant \mu(g^2)\mu(h)$ d'où $\mu(h) > 0$.

Exercice 9.

Soient $x_0, \ldots, x_d$, d points distincts fixés dans $[a,b]$ et $(L_0, \ldots, L_d)$ la base de $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes de Lagrange associés ($L_i(x_j) = \delta_{ij}$). Pour $x \in [a,b]$ on a

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{d} P_k(x_i)L_i(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{d} f(x_i)L_i(x) = f(x).$$

Ceci prouve que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à d et que les coordonnées de P_k dans la base (L_i) convergent vers celles de f. Par équivalence des normes, il y a convergence pour toute norme sur $\mathbb{R}_d[X]$, en particulier pour la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 10.

1) Le seul point douteux est $(0,0)$ et $|f(x,y)| \leqslant |y|$ permet de conclure.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3(x^2+y^2)^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 - x^2y^2(x^2+y^2)^2$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ par retour à la définition.

3) $f((0,0) + t(1,1)) = t$ d'où $D_{(1,1)}f(0,0) = 1$.

4) Si f est différentiable en $(0,0)$ alors $D_e f(0,0) = df_{(0,0)}(e)$ est une quantité linéaire par rapport à e nulle sur les vecteurs de la base canonique donc nulle pour tout e, ce qui n'est pas au vu de la question précédente. Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$ et donc encore moins de classe $\mathcal{C}^1$.

On peut aussi constater directement la discontinuité en $(0,0)$ des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \frac{1}{4} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \neq \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 11.

Condition nécessaire : $f(0) = 0$. Si cette condition est remplie, on a pour $x > 0$: $g(x) = \int_{t=0}^{1} f'(tx)\,dt$, quantité prolongeable de façon $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+ à l'aide du théorème de Leibniz.
Il vient : $g^{(k)}(0^+) = f^{(k+1)}(0)/k+1$. Par parité, g est alors $\mathcal{C}^\infty$ en 0 si et seulement si toutes les dérivées d'ordre impair de g en 0^+ sont nulles, soit : $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k impair.

Exercice 12.

On a facilement $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, puis $x_{n+1} \sim x_n$. Donc $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n+1} + x_n)/x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ ce qui donne par sommation : $x_n \sim \sqrt{n/2}$.

Exercice 13.

Pour $\beta < -1$, on a $u_n \sim n^\alpha \zeta(-\beta)$ et la série converge si et seuulement si $\alpha < -1$.
Pour $\beta > -1$, on a $u_n \sim n^{\alpha+\beta+1}/(\beta+1)$ et la série converge si et seuulement si $\alpha + \beta < -2$.
Pour $\beta = -1$, on a $u_n \sim n^\alpha \ln(n)$ et la série converge si et seuulement si $\alpha < -1$.

Exercice 14.

4) $S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 15.

2) $S(x) = 1/x - S(x+1) = 1/x - S(1) + o(1) = 1/x - \ln(2) + o(1)$.

Exercice 16.

1) Il se peut qu'il n'y ait pas limite, par exemple avec $f(x) = 1$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant x \leqslant n + 1/n^2$ et $f(x) = 0$ sinon. Par contre, si l'on sait qu'il y a limite, finie ou infinie, alors cette limite est nulle.

2) $\int_{t=x}^{2x} f(t)\,dt \leqslant x f(x) \leqslant 2 \int_{t=x/2}^{x} f(t)\,dt$ et les deux gendarmes tendent vers zéro.

3) $x \mapsto 1/x \ln(f(x))$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, par changement de variable $y = \ln(x)$ la fonction $y \mapsto 1/f(e^y)$ l'est sur $[0, +\infty[$. Il s'agit d'une fonction décroissante, elle est donc négligeable devant $1/y$ lorsque $y \to +\infty$ (soit $x \to +\infty$). Ainsi, pour x suffisament grand, $0 \leqslant 1/f(x) = 1/f(e^y) \leqslant 1/y = 1/e^x$ ce qui implique l'intégrabilité de $1/f$.

Exercice 17.

Exercice ignoble qu'il convient de refuser.

Exercice 18.

Il y a convergence absolue par domination par $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$.
En linéarisant : $4\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$, il vient :

$$\begin{aligned}
4I &= \lim_{a\to 0^+} \int_{x=a}^{1/a} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0^+} \Big(3\int_{x=a}^{1/a} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx - \int_{x=a}^{1/a} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,dx\Big) \\
&= \lim_{a\to 0^+} \Big(3\int_{x=a}^{1/a} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx - 3\int_{y=3a}^{3/a} \frac{\sin(y)}{y^2}\,dy\Big) \\
&= \lim_{a\to 0^+} \Big(3\int_{z=a}^{3a} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz - 3\int_{z=1a}^{3/a} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz\Big).
\end{aligned}$$

On a $\sin(z)/z^2 = 1/z + O(1)$ si $z \to 0^+$ et $\sin(z)/z^2 = O(1/z^2)$ si $z \to +\infty$.
En intégrant, $\int_{z=a}^{3a} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} \ln(3)$ et $\int_{z=1/a}^{3/a} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz \underset{a\to O^+}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $I = \frac{3}{4}\ln(3)$.

Exercice 19.

1) L'intégrale converge en 2 et diverge en $+\infty$.

2) L'intégrale converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice 20.

1) Par DL, $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ est prolongeable par continuité en 0^+.

3) $I_n - I_{n-1} = \int_{x=0}^{\pi/2} 2\cos(2nx)\,dx = 0$ donc $I_n = I_0 = \pi/2$.

4) DL de φ'.

5) Intégrer poar parties, $J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

6) $J_n = \int_{x=0}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx - I_n$ donc $\int_{x=0}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21.

2) Par convergence dominée par $\dfrac{1}{1+t^2}$, $\int_{[0,+\infty[} f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t=0}^{1} \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 22.

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\,dt$. L'intégrale est généralisée en $t = 0$ et en $t = 2\pi$ si $x = 1$; en $t = \pi$ (point intérieur) si $x = -1$ et est non généralisée dans les autres cas. Par ailleurs, le changement de variable $t \mapsto \pi + t$ donne $f(x) = f(-x)$ compte-tenu de la 2π-périodicité de l'intégrande, dans tous les cas où l'une des deux intégrales existe.

Étude du cas $x = 1$: en 0^+ on a $\ln((1-\cos(t))^2) = \ln(t^4/4 + o(t^4)) = 4\ln(t) + o(1)$ donc l'intégrale converge au voisinage de 0^+. Il y a aussi convergence au voisinage de 0^- par le même raisonnement (avec $\ln(|t|)$ à la place de $\ln(t)$) donc convergence au voisinage de $2\pi^-$ par 2π-périodicité. Ainsi $f(1)$ existe et par parité, $f(-1)$ existe aussi donc en définitive, f est définie sur $\mathbb{R}$.

Continuité de f : soit $x \in [0,1[$ et a tel que $x < a < 1$. Pour $y \in [0,a]$ et $t \in [0,2\pi]$ on a

$$(1-a)^2 \leqslant (1-y)^2 \leqslant y^2 - 2y\cos(t) + 1 \leqslant (1+y)^2 \leqslant (1+a)^2$$

donc $|\ln(y^2 - 2y\cos(t) + 1| \leqslant \max(-\ln((1-a)^2), \ln((1+a)^2))$. Par convergence localement dominée, f est continue sur $[0,1[$. On montre de même la continuité de f sur $]1,+\infty[$. Soit à présent $x = 1$ et $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Pour $t \in [0,2\pi]$ on a

$$\begin{aligned}
y^2 - 2y\cos(t) + 1 &= (y-1)^2 + 2y(1-\cos(t)) \geqslant 2y(1-\cos(t)) \geqslant 1 - \cos(t) \\
y^2 - 2y\cos(t) + 1 &= (y+1)^2 - 2y(1+\cos(t)) \leqslant (y+1)^2 \leqslant \frac{25}{4}.
\end{aligned}$$

Il vient $|\ln(y^2 - 2y\cos(t) + 1| \leqslant \max(-\ln(1-\cos(t)), \ln(25/4)$, puis par convergence dominée, f est continue en 1. Étant paire, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation : on montre de manière analogue que f est dérivable sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ avec

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{2x - 2\cos(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}\,dt \\
&= 2\int_{t=0}^{\pi} \frac{2x - 2\cos(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}\,dt \\
&= 2\int_{u=0}^{+\infty} \frac{2x(1+u^2) - 2(1-u^2)}{(x^2+1)(1+u^2) - 2x(1-u^2)} \times \frac{2du}{1+u^2} & (u = \tan(t/2)) \\
&= 2\int_{u=0}^{+\infty} \frac{2(x-1) + 2(x+1)u^2}{(x-1)^2 + (x+1)^2u^2} \times \frac{2du}{1+u^2} \\
&= \frac{4}{x}\int_{u=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{1+u^2} + \frac{x^2-1}{(x-1)^2 + (x+1)^2u^2}\Big)\,du & (x \neq 0) \\
&= \frac{4}{x}\Big[\arctan(u) + \arctan(u\frac{x-1}{x+1})\Big]_{u=0}^{+\infty} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4\pi/x & \text{si } x > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi f est constante, sur $[0,1]$, égale à $f(0) = 0$ et pour $x \geqslant 1$: $f(x) = 4\pi\ln(x) + f(1) = 4\pi\ln(x)$.

Exercice 23.

2) Si $a = 0$, découper l'intégrale en une série d'intégrales sur des segments adjacents de longueur t puis encadrer chaque intégrale à l'aide de la décroissance de f.

Si $a > 0$, écrire $f = g + h$ avec g décroissante et h nulle en dehors de $[0, a]$. La somme relative à g se traite comme précédement ; celle relative à h relève du théorème sur les sommes de Riemann.

Exercice 24.

1) $R = 1$.

2) $(2n+3)a_{n+1} = (2n+2)a_n +$ calculs.

3) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}f(x)) = \dfrac{(1-x^2)f'(x) - xf(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d'où $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 25.

1) Qu'il en existe une et une seule définie sur $]0, +\infty[$ prenant une valeur et une dérivée fixées en un point $t_0 > 0$ et une et une seule définie sur $]-\infty, 0[$ prenant une valeur et une dérivée fixées en un point $t_1 < 0$.

3) La question précédente semble montrer que $\ln(\varphi(t)) = A\sqrt{t}$, soit $\varphi(t) = e^{A\sqrt{t}}$, ce que l'on confirme par le calcul avec $A = 1$. Le même calcul indique aussi $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est solution et ces deux fonctions étant linéairement indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions sur $]0, +\infty[$.

On pense alors pour $t < 0$ à remplacer $\sqrt{t}$ par $i\sqrt{|t|}$, ce qui fournit, après vérifications, un système fondamental de solutions sur $]-\infty, 0[$.

4) Seule la fonction nulle convient.

Exercice 26.

1) Leibniz + regroupement + reconnaissance de $d(\cos\theta \sin(x \sin\theta))/d\theta$.

2) On peut facilement développer l'intégrande précédent en série entière par rapport à x et intégrer terme à terme, donc F est une solution développable en série entière (de rayon infini), ainsi que tous ses multiples. Il n'y a pas unicité...

Par contre, l'injection de $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans $(\mathcal{E})$ donne $a_{n+1} = -a_{n-1}/(n+1)^2$ avec a_0 indéterminé et $a_1 = 0$. Il y a donc unicité à un facteur multiplicatif près.

Exercice 27.

On remarque que φ est développable en série entière : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}/(2n)!$ avec $R = \infty$. Par ailleurs, si y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset]0, +\infty[$, alors $2xy' + y = 2\sqrt{x}d(y\sqrt{x})/dx$. Donc y est solution de l'équation proposée si et seulement si elle est de la forme

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(a + \int_{t=b}^{x} \tfrac{3}{2}\sqrt{t}\varphi(t)\,dt\Big).$$

On intègre terme à terme sans difficulté le développement en série de $\sqrt{t}\varphi(t)$ et on obtient :

$$y = \frac{c}{\sqrt{x}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ceci est la somme d'une série entière si et seulement si $c = 0$ et alors $y = \sin(x^{3/2})/\sqrt{x}$. La même série entière est aussi solution sur $]-\infty, 0[$ et c'est la seule ; elle a pour expression $y = -\operatorname{sh}((-x)^{3/2})/\sqrt{-x}$.

Exercice 28.

1) Soient $g, g' \in G$ tel que les ensembles gHg^{-1} et $g'Hg'^{-1}$ ont en commun un élément $x \neq e$: $x = ghg^{-1} = g'h'g'^{-1}$. Alors $h = g^{-1}g'h'g'^{-1}g \in H \cap (g^{-1}g')H(g^{-1}g')^{-1}$ et $h \neq e$ car $x \neq e$. Il vient $g^{-1}g' \in H$, soit $g' \in gH$.

Réciproquement, si $g' \in gH$: $g' = gk$ avec $k \in H$ alors $g^{-1}g'Hg'^{-1}g = kHkk^{-1} = H$ puis $g'Hg'^{-1} = gHg^{-1}$.

En conséquence, quand g et g' décrivent G, les ensembles $gHg^{-1} \setminus \{e\}$ sont $g'Hg'^{-1} \setminus \{e\}$ sont soit disjoints, soit égaux et pour g fixé, le nombre de g' pourlequels il y a égalité est $\mathrm{card}(gH) = \mathrm{card}(H)$. Par ailleurs, ces ensembles ont tous même cardinal, $\mathrm{card}(H) - 1$. Il vient :

$$\mathrm{card}(\bigcup_{g\in G}(gHg^{-1} \setminus \{e\})) = \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(H)}(\mathrm{card}(H) - 1) = \mathrm{card}(G) - \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(H)}.$$

Et enfin, $\mathrm{card}(K) = \dfrac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(H)}$.

Remarque : l'interrogateur prétend que K est un sous-groupe de G, mais que ce fait est long et difficile à démontrer.

2) Si $igig^{-1} = e$ alors $gig^{-1} = i \neq e$ ce qui est exclus par hypothèses sur H et g.

Si $k = ij \notin K$ alors k appartient à un conjugué de H que l'on note $H' = uHu^{-1}$. On a aussi $k^{-1} = ji \in H' = uHu^{-1}$ et $ji = jkj^{-1} \in jH'j^{-1} = (ju)H(ju)^{-1}$. Comme $k \neq e$, on en déduit qu'il existe $h \in H$ tel que $ju = uh$, soit $j = uhu^{-1} \in H'$. Mais alors $i = kj \in H'$ donc H et H' ont un élément autre que e en commun, puis $u \in H$ et enfin $j \in H$ ce qui est faux.

Exercice 29.

1) Sinon, P a une racine multiple, donc racine de P', et les racines de P' ne conviennent pas.

2) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 2$.

$a^3 = a - 1$, donc $a^6 = (a - 1)^2$ et $a^7 = a^3 - 2a^2 + a = -2a^2 + 2a - 1$, de même pour b et c. Il vient $a^7 + b^7 + c^7 = -5$.

Exercice 30.

1) Unicité par connaissance de P_n sur un ensemble infini. Existence par récurrence : $P_0 = 2$, $P_1 = X$, $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$. On peut aussi invoquer la suite des polynômes de Chebychev définie par $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, d'où $T_n((z+1/z)/2) = (z^n+1/z^n)/2$ pour tout $z \in \mathbb{U}$ donc aussi pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $P_n = 2T_n(X/2)$ convient.

3) les racines complexes de P_n sont les z de la forme $z = u + 1/u$ avec $u^{2n} = -1$, soit $u_k = e^{i(2k+1)\pi/2n}$ et $z_k = 2\cos((2k + 1)\pi/2n)$ avec $0 \leqslant k < n$. Elles sont simples, d'où $\dfrac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(X - z_k)P'_n(z_k)}$.

La relation $P_n(x+1/x) = x^n + 1/x^n$ donne par dérivation : $(1-1/x^2)P'_n(x+1/x) = n(x^{n-1} - 1/x^{n+1})$, d'où

$$P'_n(z_k) = \frac{n(u_k^n - 1/u_k^n)}{u_k - 1/u_k} = \frac{(-1)^k n}{\sin((2k + 1)\pi/2n)}.$$

Exercice 31.

2) Étude de fonction.

3) $X^{2p} + \ldots + 1 = \dfrac{1 - X^{2p+1}}{1 - X}$, ce qui donne la formule à vérifier par dérivation.

Il vient $Q_p(2) = (2p+5)2^{2p} - 1 > 0$, $R_p(1/2) > 0$ donc $1/\alpha_p > 1/2$ par décroissance de R, soit $\alpha_p < 2$. Aussi, $Q_p(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^{2p}(7 - p) - 4 < 0$ pour $p \geqslant 4$ et on conclut de même.

Exercice 32.
$x = e^{i\alpha}$, $y = e^{i\beta}$, $z = e^{-i(\alpha+\beta)}$, $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha(1-\cos\beta) = -\sin\beta(1-\cos\alpha)$.

Si $\cos\alpha = 1$, alors $x = 1$ puis $y = \pm i$, $z = -y$. Réciproquement, les triplets $(1, i, -i)$ et $(1, -i, i)$ conviennent. Par symétrie, $(i, 1, -i)$, $(-i, 1, i)$, $(i, -i, 1)$ et $(-i, i, 1)$ sont aussi solution.

Si $\cos\beta = 1$, on obtient $y = 1$ puis $x = \pm i$, $z = -x$, solution déjà trouvée. Si $\cos\alpha \neq 1$ et $\cos\beta \neq 1$ alors $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = -\dfrac{\sin\beta}{1-\cos\beta}$, soit $\tan(\alpha/2) = -\tan(\beta/2)$ donc $\alpha+\beta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. On trouve alors $z = 1$, $x = \pm i$, $y = -x$, solution déjà trouvée.

En conclusion, les solutions sont les six couples cités.

Exercice 33.
Pour n impair.

Exercice 34.
2) Avec $z = x + y\alpha$, on a $z\sigma(z) = x^2 + xy(\alpha+\beta) + y^2\alpha\beta = x^2 + xy - y^2 \in \mathbb{Z}$. σ étant un morphisme d'anneaux, la fonction N est multiplicative donc $z \in A^* \Rightarrow N(z) \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow N(z) = 1$. Réciproquement, si $N(z) = 1$ alors $\pm\sigma(z)$ est inverse de z dans A.

Exercice 35.
Si $P(a) = 0$ alors $P(a^2) = 0$ puis $P(a^4) = 0$, etc. P ayant un nombre fini de racines, il vient $a = 0$ ou a est une racine de l'unité, et en particulier $a \in \mathbb{U} \cup \{0\}$. On a aussi $P((a+1)^2) = 0$, donc $a + 1 \in \mathbb{U} \cup \{0\}$. Ainsi a appartient à $(\mathbb{U} \cup \{0\}) \cap (\mathbb{U} \cup \{0\} - 1) = \{-1, 0, j, j^2\}$. On ne peut avoir $a = -1$ car alors $a^2 = 1$ n'appartient pas à l'intersection précédente. On ne peut avoir $a = 0$ car alors $(a+1)^2 = 1$ n'est pas racine de P. Ainsi, seuls j et j^2 peuvent être racines de P et par factorisation : $P = \lambda(X - j)^\alpha(X - j^2)^\beta$. En reportant dans la relation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, il vient $\lambda = 1$, $\alpha = \beta$, $P = (X^2 + X + 1)^\alpha$ et réciproquement tout tel polynôme convient.

Exercice 36.
Si f désigne un tel morphisme, alors f envoie toutes les transpositions sur la même image (deux transpositions sont conjuguées dans S_n) et cette image est une racine carrée de 1. Ainsi f est constante ou égale à la signature et la réciproque est bien connue.

Exercice 37.
1) Non : pour tout p premier supérieur ou égal à 5 on a $a_{2p} = 0$ et $a_{p^2} = 1$.
2) Lorsque $n = p^\alpha q^\beta$ avec p, q premiers distincts, les diviseurs de n à considérer sont les entiers de la forme $p^x q^y$ avec $(x, y) \in [\![0, \alpha]\!] \times [\![0, \beta]\!]$ tels que $\frac{1}{2} \leqslant p^{2x-\alpha}q^{2y-\beta} \leqslant 2$. Lorsque (α, β) décrit $\mathbb{N}^2$ et (x, y) décrit $[\![0, \alpha]\!] \times [\![0, \beta]\!]$, le nombre $r = p^{2x-\alpha}q^{2y-\beta}$ décrit le sous-groupe multiplicatif H de $\mathbb{R}^{+*}$ engendré par p, q. On construit ci-dessous une suite (r_k) d'éléments de $H \setminus \{1\}$ convergeant vers 1. Il en résulte que $H \cap [\sqrt{1/2}, \sqrt{2}[$ est un ensemble infini et donc qu'il existe des valeurs de α, β pour lesquelles $a_{p^\alpha q^\beta}$ est arbitrairement grand. En conséquence, (a_n) n'est pas bornée.

Construction de (r_k) : pour $x \in \mathbb{N}^*$ soit y l'unique entier tel que $q^y < p^x < q^{y+1}$. le réel $p^x q^{-y}$ appartient donc à $[1, q]$ et l'application $x \to p^x q^{-y}$ étant injective, on a ainsi une trouvé suite d'élements dans $H \cap [1, q]$ deux à deux distincts. On en extrait une sous-suite convergente et on prend pour r_k le quotient de deux termes successifs de cettte sous-suite.

Exercice 38.

Déjà il faut $c \wedge d = 1$, ce que l'on supposera désormais.

Cas particulier, $b = 0$, $d \neq 0$: si p est un diviseur premier de d qui ne divise pas a alors a est inversible modulo p donc on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $an + c \equiv 0 \pmod p$. Pour un tel n, $an + c$ et d ont p comme diviseur commun, ce que l'on ne veut pas. Ainsi, une condition nécessaire dans le cas considéré est que tous les facteurs premiers de d divisent a et aucun ne divise c. Et elle est clairement suffisante.

Deuxième cas particulier, $b = d = 0$: $an + c$ est premier à 0 si et seulement s'il vaut ± 1 et on a cela pour tout n si et seulement si $a = 0$, $c = \pm 1$.

Cas $b \neq 0$: on applique la première étape de l'algorithme d'Euclide au couple (a, b) : $a = qb + r$ donc $an + c = q(bn + d) + rn + (c - qd)$. En conséquence, $an + c$ et $bn + d$ sont premiers entre eux si et seulement si $bn + d$ et $rn + (c - qd)$ le sont. Il n'y a plus qu'à continuer jusqu'à l'obtention du pgcd de a et b, et on est ramené à l'un des deux cas particuliers précédents.

Détaillons : soient $\delta = a \wedge b$, $a = \delta\alpha$, $b = \delta\beta$, $ua + vb = \delta$.

La transformation $(x, y) \to (ux + vy, \alpha y - \beta x) = (x', y')$ est une bijection de $\mathbb{Z}^2$ car la matrice $M = \begin{pmatrix} u & v \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ est à coefficients entiers, inversible d'inverse elle aussi à coefficients entiers. Il en résulte qu'elle conserve le groupe additif engendré : $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ par double inclusion. Ainsi, $an + c$ et $bn + d$ sont premiers entre eux si et seulement si $(ua + vb)n + (uc + vd)$ et $(\alpha b - \beta a)n + (\alpha d - \beta c)$ le sont, soit $(\delta n + uc + vd) \wedge (\alpha d - \beta c) = 1$. Ceci a lieu pour tout n si et seulement si $\alpha d - \beta c \neq 0$, tous ses facteurs premiers divisent δ et aucun ne divise $uc + vd$.

Exercice 39.

Par décomposition en facteurs premiers, si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ alors $D_n = (1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + \dots + p_k^{\alpha_k})$, quantité multiplicative s'agissant d'entiers premiers entre eux.

Exercice 40.

Considérons l'application $\varphi : n \mapsto \frac{9n+1}{10}$. φ réalise une bijection de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des puissances de 10. Il en résulte qu'un polynôme P conserve $\mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi \circ P \circ \varphi^{-1}$ conserve $\mathcal{B}$. Soit $Q = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i$ avec $a_q \neq 0$ un polynôme conservant $\mathcal{B}$: pour tout entier naturel n, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(10^n) = 10^{p_n}$. Alors $Q(10^n)/10^{nq} = 10^{p_n - nq} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a_q$. Ainsi, a_q appartient à l'adhérence de $E = \{10^k, k \in \mathbb{Z}\}$. On montre facilement que cette adhérence est $E \cup \{0\}$ et comme $a_q \neq 0$, il vient $a_q = 10^k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. De plus, $p_n - nq \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} k$ donc $p_n - nq = k$ pour tout n suffisament grand. Enfin pour un tel n, $10^{p_n} = Q(10^n) = 10^{qn+k} + R(10^n)$ avec $R = Q - a_q X^q$ donc $R(10^n) = 0$. Ayant une infinité de racines, le polynôme R est le polynôme nul. En résumé, $Q(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \Rightarrow Q = 10^k X^q$ et réciproquement un tel Q convient pour $k \in \mathbb{N}$ et seulement $k \in \mathbb{N}$. En revenant à la question de départ, les polynômes conservant $\mathcal{A}$ sont les polynômes de la forme $P = \dfrac{10^{k+1-q}(9X+1)^q - 10}{9}$ avec $k, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 41.

Avec $d = x \wedge y$, $x = ad$, $y = (a-1)d$ il vient $a(a-1)d = 72$, soit $(d, a) \in \{(1, 9), (6, 4), (12, 3), (36, 2)\}$ puis $(x, y) \in \{(9, 8), (24, 18), (36, 24), (72, 36)\}$, valeurs qui conviennent effectivement.

Exercice 42.

On suppose $n \geqslant 3$ pour qu'il y ait au moins un triangle. L'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}|\det(u,v)|$ où u, v sont les vecteurs portant deux côtés du triangle *(ne pas utiliser la formule base×hauteur/2 si aucun côté du triangle n'est parallèle à l'un des deux axes de coordonnées !)*. On trouve $\text{aire}(\mathcal{T}_i) = n/2$. Par ailleurs, les seuls points à coordonnées entière sur la frontière de $\mathcal{T}_i$ sont ses trois sommets du fait de la primalité de n. On obtient $a = (n-1)/2$, indépendant de i.

Démonstration du théorème (à mettre en forme) : le cas d'un rectangle à côtés parallèles aux axes est trivial ; le cas d'un triangle rectangle à côtés parallèles aux axes s'en déduit facilement par symétrie (les points sur l'hypothénuse intérieurs au rectangle associé comptent pour moitié dans le triangle et dans son symétrique). Le cas général s'en déduit probablementt par décomposition du polygone en triangles dont les sommets sont à coordonnées entières.

Méthode plus simple : on cherche le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$0 < x + y < n \text{ et } \frac{n-i}{i} < \frac{y}{x} < \frac{n-i+1}{i-1}.$$

En prenant $z = x + y$ comme variable auxilliaire, il s'agit de dénombrer les couples $(x, z) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leqslant z \leqslant n-1$ et $\frac{(i-1)z}{n} < x < \frac{iz}{n}$. Par primalité de n les bornes ne sont pas entières, et le nombre de x à z fixé est égal à la différence des parties entières, soit

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{iz}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(i-1)z}{n} \right\rfloor &= \frac{iz}{n} - \frac{(iz) \bmod n}{n} - \frac{(i-1)z}{n} + \frac{(i-1)z \bmod n}{n} \\ &= \frac{z}{n} - \frac{(iz) \bmod n}{n} + \frac{(i-1)z \bmod n}{n}.\end{aligned}$$

Comme z est premier à n, l'application $i \mapsto (iz) \bmod n$ est une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0 \bmod n\}$ et par conséquent,

$$\sum_{z=1}^{n-1} \frac{(iz) \bmod n}{n} = \sum_{z=1}^{n-1} \frac{((i-1)z) \bmod n}{n}$$

et le nombre total de couples (x, z) cherchés est $\displaystyle\sum_{z=1}^{n-1} \frac{z}{n} = \frac{n-1}{2}$.

Exercice 43.

$\chi_A(x) = x(x^2 + a^2 + b^2 + c^2)$ donc pour $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, A admet trois valeurs propres complexes distinctes, $0, i\alpha, -i\alpha$ avec $\alpha^2 = a^2 + b^2 + c^2$ et l'on a

$$\exp(tA) = e^{0t}U + e^{i\alpha t}V + e^{-i\alpha t}W = U + \cos(\alpha t)(V + W) + i\sin(\alpha t)(V - W),$$

pour des matrices U, V, W que l'on peut calculer par exemple par identification du développement limité en $t = 0$:

$$\begin{aligned}&\exp(tA) = I_3 + tA + t^2A^2/2 + o(t^2) \\ &U + \cos(\alpha t)(V + W) + i\sin(\alpha t)(V - W) = U + V + W + ti\alpha(V - W) - t^2\alpha^2(V + W)/2 + o(t^2),\end{aligned}$$

d'où $U = I_3 + A^2/\alpha^2$, $V + W = -A^2/\alpha^2$, $i(V - W) = A/\alpha$.

Exercice 44.

1) Elle est linéaire injective entre deux ev de même dimension finie.

2) $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} L_A$, A décrivant $E \setminus \{0\}$. A est déterminée par $\mathcal{H}$ à un coefficient multiplicatif non nul près.

3) Si T est triangulaire supérieure alors $\mathcal{T}_n^+ \subset \operatorname{Ker}(L_T)$ donc $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^+) = \dim(\mathcal{T}_n^+) = \frac{n(n-1)}{2}$. Si T est diagonale alors on a aussi $\mathcal{T}_n^- \subset \operatorname{Ker}(L_T)$ et $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^-) = \frac{n(n-1)}{2}$. Si T est triangulaire supérieure non diagonale alors il existe une matrice $M \in \mathcal{T}_n^-$ telle que $\operatorname{tr}(TM) \neq 0$, donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^-$ est un hyperplan de $\mathcal{T}_n^-$, d'où $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{T}_n^-) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$. On traite de manière similaire le cas où T est triangulaire inférieure.

Exercice 45.

1) $\chi_A = x^3 + x$, donc $\operatorname{sp}(A) = \{0, i, -i\} \cap \mathbb{K}$.

2) Il n'y a pas unicité d'une telle matrice. Mettons $D = \operatorname{diag}(0, i, -i)$ sous réserve que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3) Énoncé faux, $M = 0$ vérifie cette relation.

Exercice 46.

1) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-1, 0, 2)$.

3) $Y' = DY$.

4) $f(t) = -ae^{-t} + 2ce^{2t}$, $g(t) = ae^{-t} - b + ce^{2t}$, $h(t) = b + 3ce^{2t}$.

Exercice 47.

$u^2 - (n-2)u = (n-1)\,\mathrm{id}$.

Exercice 48.

$\det(A)$ est congru modulo 2 au déterminant de la matrice $J - I_{2p}$ où $J \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Comme $J^2 = 2pJ$, on a $\operatorname{sp}(J) \subset \{0, 2p\}$, donc $\operatorname{sp}(J - I_{2p}) \subset \{-1, 2p-1\}$ et par conséquent $\det(J - I_{2p})$ est un entier impair. Il en va de même pour $\det(A)$.

Exercice 49.

Si P admet une racine $\lambda \neq 0$ alors la matrice $A = \lambda I_n$ contredit la propriété voulue. Donc 0 est l'unique racine éventuelle de P et $P = \alpha X^p$ avec $\alpha \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Réciproquement, ces polynômes conviennent.

Exercice 50.

1) $a = 2\cos\theta$, $b = -1$.

2) $D_n(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \dfrac{\pi}{n+1}\mathbb{Z} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

3) Oui, elle est réelle symétrique.

4) $x - 2\cos(k\pi/(n+1))$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 53.

$\exp(N) - I_n$ est un polynôme en N sans terme constant, donc $\operatorname{Ker}(N) \subset \operatorname{Ker}(\exp(N) - I_n)$. Réciproquement, si $X \in \operatorname{Ker}(\exp(N) - I_n)$ et $Y = NX$ alors $P(N)Y = 0$ où $P(t) = 1 + t/2 + \ldots + t^{n-1}/n!$. P est premier avec le polynôme minimal de N qui est une puissance de t donc la matrice $P(N)$ est inversible. Il vient $Y = 0$, soit $X \in \operatorname{Ker}(N)$. Ainsi les noyaux sont égaux.

Exercice 54.

1) $(A_\tau M)_{ij} = m_{\tau(i),j}$ et $(MA_\tau)_{ij} = m_{i,\tau(j)}$.
Plus généralement, $(A_\sigma M)_{ij} = m_{\sigma^{-1}(i),j}$ et $(MA_\sigma)_{ij} = m_{i,\sigma(j)}$.

Exercice 55.

$M_{a,b} = aI_{2n-1} + bJ_{2n-1}$ où J_{2n-1} est la matrice consituée de 1 sur l'anti-diagonale, et de zéros ailleurs. On a $J_{2n-1}^2 = I_{2n-1}$, d'où $M_{a,b}^2 = (a^2+b^2)I_{2n-1} + 2abJ_{2n-1} = (b^2-a^2)I_{2n-1} + 2aM_{a,b}$. Lorsque $b \neq 0$, $M_{a,b}$ n'est pas scalaire et son polynôme minimal est de degré au moins égal à 2 ; c'est $X^2 - 2aX + a^2 - b^2$. Lorsque $b = 0$, le polynôme minimal est $X - a$.

Exercice 56.

1) Soit $\varphi(x) = px + q$: On a $T(f) = f \circ \varphi$, et plus généralement, $T^k(f) = f \circ \varphi^{[k]}$ où $\varphi^{[k]} = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ fois}} = x \mapsto p^k(x-1) + 1$. En particulier, si $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$ et f est une fonction propre associée, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$: $\lambda^k f(x) = f(p^k(x-1)+1) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(1)$. En choisissant x tel que $f(x) \neq 0$, on voit que la suite (λ^k) est convergente, d'où $\lambda \in]-1, 1]$. Le cas $\lambda = 0$ est à exclure car T est manifestement bijective.

2) Si $T(f) = \lambda f$ alors $T(f') = (1/p)(T(f))' = (\lambda/p)f'$ et plus généralement, $T(f^{(k)}) = (\lambda/p^k)f^{(k)}$. Ayant $\lambda \neq 0$ et $0 < p < 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel $\lambda/p^k \notin]-1, 1]$ et pour un tel k, on a $f^{(k)} = 0$.

3) En cherchant f, fonction propre, comme combinaison linéaire des fonctions polynomiales $x \mapsto (x-1)^k$, on trouve $f(x) = a(x-1)^k$, $\lambda = p^k$.

Exercice 57.

Oui si et seulement si $(a|b) \neq 0$.

Exercice 58.

Orthodiagonaliser u. Il vient $f(x) = \sum_i \lambda_i^2 x_i^2 - (\sum_i \lambda_i x_i^2)^2$ ou les λ_i sont les valeurs propres de u et x_i les coordonnées de x dans une base orthonormale propre associée. S'il existe i tel que $\lambda_i \neq 0$, alors en prenant $x_i = t$, $x_j = 0$ pour $j \neq i$ il vient $f(x) = \lambda_i^2(t^2 - t^4) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc f est non minorée. S'il n'existe pas de tel i alors f est identiquement nulle, et par conséquent minorée avec $\inf(f) = 0$.

S'il existe i, j tels que $\lambda_i\lambda_j < 0$: on prent $x_i = t/\sqrt{|\lambda_i|}$, $x_j = t/\sqrt{|\lambda_j|}$ et tous les autres x_k nuls. Il vient $f(x) = (|\lambda_i| + |\lambda_j|)t^2$, quantité non majorée. Si au contraire, $\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$ pour tous i, j alors

$$f(x) = \sum_i \lambda_i^2(x_i^2 - x_i^4) - 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j x_i^2 x_j^2 \leqslant \sum_i \lambda_i^2(x_i^2 - x_i^4) \leqslant \frac{1}{4}\sum_i \lambda_i^2.$$

En conclusion, f est majorée si et seulement la suite (λ_i) est de signe constant. Reste à déterminer $\sup(f)$ dans ce cas ...

Exercice 59.

La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthonormale, donc la distance est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients en trop ; $d = 1$.

Exercice 60.

Il suffit de prouver que l'intersection est nulle. Si $X = AY$ et $AX = 0$ alors ${}^tXX = {}^tY{}^tAX = -{}^tYAX = 0$ donc $X = 0$.

Exercice 61.

La condition est clairement nécessaire. Pour le caractère suffisant, on considère $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et σ_i la réflexion de base $e_i^\perp$. On a $u(\sigma_i(e_i)) = \sigma_i(u(e_i))$, soit $u(e_i) \in \langle e_i \rangle$ et donc $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour $i \neq j$ soit σ_{ij} l'unique réflexion échangeant e_i et e_j. De $u(\sigma_{ij}(e_i)) = \sigma_{ij}(u(e_i))$, on tire $\lambda_i = \lambda_j$. Ainsi u et $\lambda_1 \,\mathrm{id}_E$ coïncident sure une base de E ; ils sont égaux.

Exercice 62.

2) Inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si A est scalaire.

3) C'est un hyperplan, de dimension $n^2 - 1$.

4) $F^\perp = \langle I_n \rangle$.

Exercice 63.

On supposera les tirages mutuellement indépendants et le choix de l'urne initiale uniforme.

1) $p_1 = \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + \frac{4}{7}) = \frac{17}{35}$.

3) $p_{n+1} - p_n = -\frac{6}{35}(p_n - p_{n-1})$ d'où $p_{n+1} - p_n = (-\frac{6}{35})^{n-1}(p_2 - p_1)$ puis

$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(p_{k+1} - p_k) = p_1 + (p_2 - p_1)\dfrac{1 - (-\frac{6}{35})^{n-1}}{1 + \frac{6}{35}} = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435}(-\frac{6}{35})^{n-1}$.

Exercice 64.

On ajoute les hypothèses d'indépendance mutuelle qui s'imposent et on note $d_k \in \{0,1,2\}$ la distance entre les ballons après k tours ($d_0 = 1$). X est le nombre de tours nécessaires pour passer de l'état $\{d_0 = 1\}$ à l'état $\{d_0 = 0\}$; on note Y le nombre correspondant si l'on était parti de l'état $\{d_0 = 2\}$. Il vient :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = n-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n-1),$$
$$\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X = n-1) + \frac{1}{4}\delta_{n1}.$$

En passant aux fonctions génératrices, on obtient :

$$G_X(z) = z(G_X(z) + G_Y(z))/2,$$
$$G_Y(z) = z(G_Y(z)/2 + G_X(z)/4 + 1/4).$$

puis $G_X(z) = \dfrac{z^2}{8 - 8z + z^2}$, ce qui permet d'obtenir la loi de X. En particulier, $\mathbb{E}(X) = 8$.

Exercice 65.

3) $N_n = X_1 + \ldots + X_n$, donc $\mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = 1$. $D_n = \{X_1 = 0, \ldots, X_n = 0\}$, mais cela ne donne pas directement $\mathbb{P}(D_n)$ car on ne dispose pas facilement de la loi conjointe de $(X_1, \ldots, X_n)$.

4) Une permutation σ appartient à l'évènement $\{N_n = k\}$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble $X \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal k tel que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \subset X$ et un dérangement s de $[\![1, n]\!] \setminus X$ tel que $\sigma(x) = s(x)$ pour tout $x \in [\![1, n]\!] \setminus X$. A X fixé, le nombre de telles permutations σ est égal au nombre de dérangements de $[\![1, n]\!] \setminus X$, soit d_{n-k} et le nombre de sous-ensembles X est $\binom{n}{k}$, d'où la première formule, sachant que D_{nk} est exactement le nombre de permutations de $[1, n]\!]$ ayant k points fixes. La deuxième en résulte en sommant sur k et en remarquant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

5) Il est bien connu que les matrices $A = \left(\binom{i-1}{j-1}\right)$ et $B = \left((-1)^{i+j}\binom{i-1}{j-1}\right)$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ sont inverses l'une de l'autre. D'après la question précédente, $\begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$ et en particulier, $d_n = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j}\binom{n}{j-1}(j-1)! = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}\dfrac{n!}{(n-j+1)!} = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k!}$.

On en déduit $d_n/n! \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$. Enfin, $\mathbb{P}(N_n = k) = D_{nk}/n! = \dfrac{d_{n-k}}{k!\,(n-k)!}$.

Exercice 66.

1) Par dérivation terme à terme ou produit de Cauchy, on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$. D'où $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

2) b) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$, $Y = (-1)^X \times X$, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k \times \frac{5^{k-1}}{6^k} = \frac{1}{5} \times \frac{-5/6}{(7/6)^2} = -\frac{6}{49}$.

Exercice 67.

Faux, prendre $X = Y = \frac{1}{2}$ (fonction constante).

Exercice 68.

1) J'interprète l'énoncé en considérant que les deux Pile à obtenir n'ont pas à être consécutifs. Dans ce cas, $\mathbb{P}(X = k) = (k+1)p^2q^k$ avec $q = 1 - p$.

2) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)p^2q^k = \dfrac{2q}{p}$.

3) $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{\infty} p^2q^n = pq^k$ puis $\mathbb{E}(Y) = q/p$.

4) Non.

Exercice 69.

Par indépendance mutuelle, $G_X(t) = G_{X_1}(t) \dots G_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}(p_i t + 1 - p_i)^{m_i}$. Par unicité d'une factorisation dans $\mathbb{C}[t]$, ce produit est la fonction génératrice d'une variable binomiale si et seulement si tous les facteurs ont mêmes racines, soit si et seulement si tous les p_i sont égaux.

Exercice 70.

1) Un sur-mot de u s'obtient en ajoutant des mots arbitraires entre les lettres de u ainsi qu'au début et à la fin de u. Ainsi, si $u = a_1 \dots a_n$ alors l'ensemble des sur-mots de u est $\Sigma^* a_1 \Sigma^* \dots \Sigma^* a_n \Sigma^*$.

En particulier, l'ensemble des sur-mots de ε est Σ^* et le langage des sur-mots de tout langage L contenant ε est Σ^*. Ainsi, $\overline{L_0} = \Sigma^*$ et $\overline{L_1} = \Sigma^* a \Sigma^* a \Sigma^*$, le langage des mots contenant au moins deux a.

3) Transformer un automate reconnaissant L en ajoutant une flêche étiquetée par Σ à chaque état.

4) La réponse précédente fournit un algorithme. L'efficacité ne pourrait se discuter que si l'on savait comment trouver un mot dans $\overline{L} \setminus \overline{F_n} \dots$

5) On construit une suite (F_n) de langages finis de proche en proche de la manière suivante :

– on pose $F_0 = \varnothing$.
– si F_n est défini et $\overline{F_n} \neq \overline{L}$, alors on choisit $\omega_n \in\neq \overline{L} \setminus \overline{F_n}$ et on pose $F_{n+1} = F_n$.

Par récurrence $\overline{F_n} \subset \overline{L}$ et pour tous $i < j$ tels que w_i et w_j existent, on n'a pas $w_i \leqslant w_j$. Avec le théorème admis, la suite (F_n) est finie et le dernier langage construit convient.

6) Résulte de **3)** et **5)**.

7) Oui, tout langage non clos, par exemple ε.

8) Par sous-mot de u, on entend tout mot obtenu à partir de u en supprimant des lettres. Si L est un tel langage, alors le langage $L' = \Sigma^* \setminus L$ est clos par sur-mot, donc régulier. Ainsi, en tant que complémentaire, L est lui aussi régulier.