

Intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 1. *Calcul de limite*

Chercher $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t} dt$.

Exercice 2. *Calcul de limite, Ensi P 90*

Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t} dt$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t + e^{3t}} dt$.

Exercice 3. *Calcul de limite*

Chercher $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_{t=3}^{x^2+x} \frac{\sin t dt}{3 + \ln(\ln t)}$.

Exercice 4. *Calcul de limite*

Chercher $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t=x}^{x^2} \frac{e^{-t} dt}{\sin t \ln t}$.

Exercice 5. *Série d'intégrales, Esem 91*

Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

Exercice 6. $\sin(t)/(t+x)$

1) Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.

Exercice 7. *Calcul de limite*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t=0}^1 \frac{x f(t)}{x^2 + t^2} dt$.

Exercice 8. *Calcul d'équivalent, Mines 1999*

Donner un équivalent pour $x \rightarrow +\infty$ de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2 + t^2} dt$.

Exercice 9. *Calcul de limite*

Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ à l'ordre 3 de $f(x) = \int_{t=a/x}^{ax} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$.

Exercice 10. $(\int f^x)^{1/x}$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\int_{t=a}^b (f(t))^x dt \right)^{1/x}$.

1) Montrer que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \max(f)$.

2) On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp \left(\int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt \right)$.

Exercice 11. $t^n f(t)$

Soit $I_n = \int_{t=0}^1 t^n \ln(1+t^2) dt$. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 12. $t^n f(t)$

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^1 t^n f(t) dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 13. $f(t^n)$

1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)$.

2) Chercher un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $\int_{t=0}^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$.

3) Chercher un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $-1 + \int_{t=0}^1 \sqrt{1+t^n} dt$.

Exercice 14. $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \rightarrow \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

Exercice 15. $f(t^n)$

Donner les deux premiers termes du DL pour $n \rightarrow \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^1 \sqrt{1+t^n} dt$.

Exercice 16. $f(t^n)$

Chercher un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $\int_{t=1}^{1+1/n} \sqrt{1+t^n} dt$.

Exercice 17. Calcul de limite

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{x+2} dx$.

Exercice 18. Calcul de limite

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^1 n f(t) e^{-nt} dt$.

Exercice 19. $(1-x/n)^n$, *Ensi PSI 1998*

Soit $x \in [0, n]$. Montrer que $(1-x/n)^n \leq e^{-x}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x=0}^n (1-x/n)^n dx$.

Exercice 20. *Équation intégrale, Ensi P 91*

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$.

Exercice 21. $\tan^n t$, *Ensi Physique P 94*

On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$.

- 1) Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- 2) Calculer I_n en fonction de n .
- 3) Que peut-on en déduire ?

Exercice 22. *Calcul de limite, École de l'Air 94*

Chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$.

Exercice 23. *Approximation de la mesure de Dirac*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue atteignant son maximum en un unique point $c \in]a, b[$.

- 1) Soit $\mu > 0$ tel que $[c-\mu, c+\mu] \subset [a, b]$. Chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{t=a}^b f^n(t) dt \middle/ \int_{t=c-\mu}^{c+\mu} f^n(t) dt \right)$.
- 2) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{t=a}^b f^n(t)g(t) dt \middle/ \int_{t=a}^b f^n(t) dt \right)$.

Exercice 24. *Équation intégrale*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x) \int_{t=0}^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 25. *Convolution*

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = \int_{t=a}^b f(t)g(x-t) dt$.

- 1) Montrer que φ est continue et que si g est de classe \mathcal{C}^k , alors φ l'est aussi.
- 2) Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 (et g est continue), alors φ est aussi de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 26. *Convolution (Mines MP 2003)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On pose $h(x) = \int_{t=0}^x f(x-t)g(t) dt$.

- 1) Existence et continuité de h .
- 2) Peut-on inverser f et g ?
- 3) On suppose f intégrable sur $[0, +\infty[$ et g bornée. Montrer que h est bornée.
- 4) On prend $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \cos(\alpha x)$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. h est-elle bornée (on pourra étudier les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$) ?

Exercice 27. Calcul d'intégrale

- 1) Calculer $\varphi(a) = \int_{t=0}^1 \frac{dt}{1+at}$.
- 2) En déduire la valeur de $\int_{t=0}^1 \frac{t dt}{(1+at)^2}$.

Exercice 28. Fonction définie par une intégrale

- On pose $\varphi(x) = \int_{t=0}^1 e^{-x/t} dt$.
- 1) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
 - 2) Vérifier que $\varphi''(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 29. Fonction définie par une intégrale, Mines 1999

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

Exercice 30. Fonction définie par une intégrale

- On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$.
- Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 31. Fonction définie par une intégrale

- On pose $I(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt$.
- 1) Montrer que I est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .
 - 2) Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Exercice 32. Intégrale de Gauss

- On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_{t=0}^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $g(x) = \int_{t=0}^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.
- 1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g' .
 - 2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
 - 3) En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 33. Intégrale de Gauss, Ensi PC 1999

On donne : $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)} dt$.

Exercice 34. Fonction définie par une intégrale

- 1) Soit $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. Prouver que I est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- 2) Chercher une relation simple entre I et I' .
- 3) En déduire la valeur de $I(x)$ (on admet que $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 35. Fonctions définies par des intégrales

- On pose, pour x réel, $F(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2} dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t\sqrt{1+t^2}} dt$.
- 1) Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et que $F(x) = |x|F(1)$.
 - 2) Montrer que la fonction $F - G$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . En déduire que G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et n'est pas dérivable en 0.

Exercice 36. Théorème de division des fonctions \mathcal{C}^∞

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ et $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$.

Vérifier que $g(x) = \int_{t=0}^1 f'(tx) dt$. En déduire que g est de classe \mathcal{C}^∞ .

Montrer de même que la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{x^k} \left(f(x) - f(0) - xf'(0) - \dots - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(0) \right)$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ en 0.

Exercice 37. $y'' + y = f$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \int_{t=0}^x f(t) \sin(x-t) dt$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y'' + y = f(x)$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 38. *Fonction définie par une intégrale*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$: $g(x, y) = \frac{1}{x} \int_{t=x}^{xy} f(t) dt$.

- 1) Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .
- 2) On suppose de plus f dérivable en 0. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 39. *Fonctions définies par des intégrales*

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} |x+t| \sin t dt$.

2) $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

3) $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

4) $f(x) = \int_{t=0}^1 \frac{e^t dt}{t+x}$.

5) $f(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} x \exp\left(\frac{\sin t}{x}\right) dt$.

6) $f(x) = \int_{t=0}^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$.

Exercice 40. *Fonction définie par une intégrale*

Montrer qu'il existe un unique réel $x \in [0, \pi]$ tel que $\int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x \sin \theta) \theta = 0$. Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

Exercice 41. *Développement en série, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999*

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx$.

- 1) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
- 2) Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
- 3) Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

Exercice 42. *Formule de Stirling*

Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Exercice 43. *Développement en série, Mines 1999*

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{e^{-i\theta} - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n}$.

Exercice 44. *Fonction définie par une intégrale, X 1999*

- 1) Calculer $f(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) dt$.
- 2) Soit $g(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin(at)}{t} dt$; calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a)$.

Exercice 45. *Développement asymptotique*

Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} (J(x) - K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2 \ln 2 + o_{x \rightarrow 0^+}(1)$.

Exercice 46. *Transformée de Laplace*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

- 1) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que φ est continue en 0.

Exercice 47.

On pose pour $n \geq 2$: $v_n = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum(v_n - 1)$?

Exercice 48.

On pose pour $n \geq 2$, $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum(u_n - 1)$ converge également.

Exercice 49. Centrale MP 2000

Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Exercice 50. Centrale MP 2000

On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

- 1) Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
- 2) Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
- 3) Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
- 4) Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Exercice 51. Ensaie MP* 2000

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.

Exercice 52. Polytechnique MP* 2000

Existence et continuité de $f(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|} \cos(x+t)}{\sqrt{|t|(1+|t|)}} dt$. Montrer que f est intégrable.

Exercice 53. Centrale MP 2001

- 1) Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} dt$ en série de fractions rationnelles.
- 2) Montrer qu'en 0^+ , $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.

Exercice 54. X MP* 2001

Étudier $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

Exercice 55. Mines 2016

Soit $\varphi(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer que φ est définie et continue sur \mathbb{R} .
- 2) Justifier le caractère \mathcal{C}^1 de φ sur \mathbb{R}^* .
- 3) Montrer que $\varphi'(x) = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{iue^{iu}}{x^2 + u^2} du$.

Exercice 56. Ensi MP 2004

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2} dt$.

- 1) Trouver le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .
- 3) Calculer $f - f'$.
- 4) Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
- 5) Montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
- 6) Tracer la courbe de f .

Exercice 57. *Ensea MP 2004*

Soit $\alpha > 0$.

- 1) Montrer que $f : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x \sin \theta) \theta$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Calculer $I = \int_{x=0}^{+\infty} f(x) dx$. Indication : écrire $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{x=0}^a f(x) dx$.

Exercice 58. *X MP* 2000*

Étudier la limite en $0+$ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t} e^{-xt} dt$.

Exercice 59. ζ et Γ

Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

Exercice 60. *Centrale MP 2002*

Soit $f : x \mapsto \int_{t=0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 61. *Polytechnique MP 2002*

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x) \exp(\lambda n \sin^2(x)) dx$.

Exercice 62. *Centrale MP 2004*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!} \int_{t=0}^1 t(t-1) \dots (t-n) dt$.

- 1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
- 2) Donner un équivalent de a_n .

Exercice 63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, *Mines-Ponts MP 2004*

Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1} \sin(nx)$ avec $0 < x < \pi$.

- 1) Étudier la convergence de la série.
- 2) Calculer $\sum_{p=0}^n u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\frac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^1 S_n(t) dt$.
- 4) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Exercice 64. *Lemme de Lebesgue, Centrale MP 2004*

Soit f continue par morceaux définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} .

- 1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- 2) On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t) dt$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \rightarrow \infty$ et la préciser.

Exercice 65. *Suite d'intégrales, Centrale MP 2004*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \left(\frac{x \pm x^n}{2} \right)^n$.

- 1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ .
- 2) a) La convergence est-elle uniforme ?
b) La convergence est-elle monotone ?
- 3) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^1 f_n(x) dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Exercice 66. *Mines-Ponts MP 2004*

Soit $f(x) = \int_{t=0}^1 \frac{1-t}{\ln t} t^x dt$. Étudier le domaine de définition de f , sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Exercice 67. Mines-Ponts MP 2004

Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} e^{-ax} dx$.

- 1) Quel est le domaine de définition de I ?
- 2) Étudier la continuité et la dérivabilité de I .
- 3) Calculer $I(a)$.

Exercice 68. ENS Lyon MP* 2004

- 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $F(x) = \int_{t=a}^b f(t)e^{-itx} dt$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) Montrer que $F(x) = \frac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o(1/x)$.
- 3) Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$.
- 4) Soit $g(x) = \int_{t=a}^b f(t)e^{-ixt^2/2} dt$. Montrer que $g(x) = \frac{I \cdot f(0)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exercice 69. Thm de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans \mathbb{C} . On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r, \theta) = \frac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et

$$F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r, \theta) d\theta.$$

- 1) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
- 2) Vérifier que $ir\partial f/\partial r = \partial f/\partial \theta$. En déduire que F est constante.
- 3) Obtenir une contradiction.

Exercice 70. Étude d'intégrales, Mines-Ponts 2015

Soient $f(x) = \int_{t=0}^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ et $g(x) = \int_{t=0}^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Donner $f'(0)$ et $g'(0)$.
- 2) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite ℓ finie. On admettra dans la suite que $\ell = \pi/2$.
- 3) Montrer que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty$.
- 4) Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que pour tout n , $f(a_n) = \frac{1}{n+1}$. Déterminer la monotonie de (a_n) et trouver un équivalent de a_n lorsque $n \rightarrow \infty$.
- 5) Montrer qu'il existe une suite (b_n) de réels positifs telle que $b_0 = 0$ et $\int_{t=b_n}^{b_{n+1}} \frac{1 - \cos t}{t} dt = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 71. Transformée de Laplace, ENS 2014

Soit φ continue par morceaux bornée sur \mathbb{R}^+ à valeurs réelles, et F définie par $F(\lambda) = \int_{x=0}^{+\infty} \varphi(x)e^{-\lambda x} dx$. On suppose que φ change n fois de signe. Montrer que F change au plus n fois de signe.

Exercice 72. Mines MP 2012

Déterminer la limite pour $n \rightarrow \infty$ de $\int_{x=0}^{+\infty} x^{-1/n}(1+x/n)^{-n} dx$.

Exercice 73. TPE 2016

Convergence et valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

Exercice 74. Mines 2017

Que dire de $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que la série de terme général $\int_{t=a}^b \frac{\varphi(t) dt}{t + \ln(n)}$ (bien définie pour $n > e^{-a}$) converge ? *Indication: faire apparaître des séries.*

solutions

Exercice 1.

$$= \int_{t=x}^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{5t}{6} + o(t) \right) dt \rightarrow \ln 2.$$

Exercice 2.

$$\frac{t}{\tan^2 t} = \frac{1}{t} + \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ prolongeable par continuité en } 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t} dt = \ln 3.$$

$$\frac{t^2}{t + e^{3t}} = t^2 + o(t^2) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t + e^{3t}} dt = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3.

Formule de la moyenne sur $[3, x]$ et $[x, x + x^2] \Rightarrow \lim = 0.$

Exercice 4.

$\ln 2.$

Exercice 5.

$$\sum_{n=1}^n (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n} \right) \frac{dt}{2+t^3} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^3} = \frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 6.

$$2) I(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \cos x \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 7.

$$\frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 8.

$$t = ux \text{ puis intégration par parties } \Rightarrow \sim \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 9.

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{a(1+x^2)} \Rightarrow f(1+h) = \frac{1}{2a} (h^2 - h^3) + o(h^3).$$

Exercice 10.

2) Soit $\varepsilon > 0$: Pour x assez petit, $|f(t)^x - 1 - x \ln(f(t))| \leq \varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a, b]$.

$$\text{Donc } \left| \int_{t=a}^b f(t)^x dt - 1 - x \int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt \right| \leq \varepsilon x, \text{ et } \left| \ln \left(\int_{t=a}^b f(t)^x dt \right) - x \int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt \right| \leq 2\varepsilon x.$$

Exercice 13.

1) TCD

$$2) = \left[\frac{t \ln(1+t^n)}{n} \right]_{t=0}^1 - \frac{1}{n} \int_{t=0}^1 \ln(1+t^n) dt \sim \frac{\ln 2}{n}.$$

$$3) \frac{1}{n} \int_{t=0}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} = \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}.$$

Exercice 14.

$$1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 15.

$$1 + \frac{1}{n} \int_{t=0}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 16.

$$u = t^n \Rightarrow \sim \frac{1}{n} \int_{u=1}^e \frac{\sqrt{1+u}}{u} du.$$

Exercice 18.

$$f(0).$$

Exercice 19.

Soit $f_n(x) = (1 - x/n)^n$ si $0 \leq x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Alors $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{simpl}} e^{-x}$ et il y a convergence dominée.

Exercice 20.

$$f(x) = \cos x.$$

Exercice 21.

- 1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
- 2) $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$,
 $I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln \sqrt{2}$.
- 3) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$.

Exercice 22.

$$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln 2.$$

Exercice 23.

- 1) 1.
- 2) $g(c)$.

Exercice 24.

$$\Phi(x) = \int_{t=0}^x f^2(t) dt \Rightarrow \Phi' \Phi^2 \rightarrow \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\ell/(3x)}.$$

Exercice 26.

- 4) Pour $\alpha = 0$ on a $h(x) = \int_{t=0}^x \frac{\sin t}{t} dt$, quantité bornée car l'intégrale converge en $+\infty$.

Pour $\alpha = 1$ on a $h(x) = \cos x \int_{t=0}^x \frac{\cos t \sin t}{t} dt + \sin x \int_{t=0}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$, quantité non bornée car la deuxième intégrale diverge en $+\infty$.

Pour $0 < \alpha < 1$, développer le $\cos(x-t)$ puis linéariser les produits obtenus. On obtient quatre intégrales convergentes, donc h est bornée.

Exercice 27.

- 1) $\frac{\ln(1+a)}{a}$.
- 2) $= -\varphi'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

Exercice 30.

$$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}, f(x) = \pi \ln(x+1).$$

Exercice 31.

$$2) I'(x) = \frac{\pi}{x+1}, I(x) = \pi \ln \left(\frac{x+1}{2} \right).$$

Exercice 32.

$$1) g'(x) = \int_{t=0}^1 (-2x)e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \sqrt{f(x)} = -f'(x).$$

Exercice 33.

$$u = \frac{a}{t} \Rightarrow I = -\frac{1}{2} \frac{dI}{da} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

Exercice 34.

- 2) $I'(x) = -2xI(x)$.
- 3) $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Exercice 38.

- 1) $g(x, y) = \int_{u=1}^y f(ux) du.$
- 2) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x} \left(yf(xy) - f(x) - \int_{u=1}^y f(ux) du \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{y^2 - 1}{2} f'(0).$

Exercice 39.

- 1) -2 de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{2}$, $2 \sin x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, 2 de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

Exercice 40.

$$2.40 < x < 2.41.$$

Exercice 41.

- 2) $a = \alpha, b = \alpha^2.$
- 3) comparaison série-intégrale $\Rightarrow I(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$

Exercice 42.

$\ln \Gamma$ est convexe, encadrer $\ln \Gamma(x)$ par les cordes passant par $([x], \ln \Gamma([x]))$.

Exercice 44.

- 1) $f'(a) = -\frac{a}{2} f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-a^2/4).$
- 2) $g'(a) = f(a) \Rightarrow g(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$

Exercice 46.

- 1) Leibniz.
- 2) Soit $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t) dt$. On a $\varphi(a) = F(0) - a \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} F(t) dt = F(0) - \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} F(u/a) du$.
Comme F est continue et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, la dernière intégrale tend vers zéro quand $a \rightarrow 0^+$ par convergence dominée.

Exercice 47.

$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ par convergence dominée. $v_n - 1 = \int_{x=0}^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int_{u=0}^1 \frac{u^{-1/n}}{1+u} du \sim \frac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 48.

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ par convergence dominée.
 $u_n - 1 = \int_{x=0}^1 \left(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n} - 1 \right) dx = \frac{1}{n} \int_{u=0}^1 \frac{u^{1-1/n}}{1+u} (u^{-2/n} - 1) du.$
 On a $0 \leq u^{-2/n} - 1 = \exp\left(-\frac{2 \ln(u)}{n}\right) - 1 \leq -\frac{2 \ln(u)}{n} \exp\left(-\frac{2 \ln(u)}{n}\right)$
 d'où $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n^2} \int_{u=0}^1 \frac{u^{1-3/n} (-\ln u)}{1+u} du = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Exercice 49.

$I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 1$.

$$I(2) = (x = e^u) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2} du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(e^u + e^{-u})^2} du = 0 \text{ (parité).}$$

$$I(3) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(e^u + e^{-u})^3} du = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{-u(e^u - e^{-u})}{(e^u + e^{-u})^3} du = \left[\frac{u}{2(e^u + e^{-u})^2} \right]_{u=0}^{+\infty} - \int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{2(e^u + e^{-u})^2}$$

$$= - \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{2u} du}{2(1+e^{2u})^2} = \left[\frac{1}{4(1+e^{2u})} \right]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}.$$

$I(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0$ par convergence dominée.

Exercice 50.

- 1) $D_f =]0, 1[$. f est convexe sur $]0, 1[$ par intégration de l'inégalité de convexité pour $x \mapsto t^{-x}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0,1} +\infty$ par convergence monotone donc f décroît puis recroît.
- 3) En 0 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}$ donc $f(x) = \int_{t=0}^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \frac{1}{x} - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} \sim \frac{1}{x}$.
- En 1 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^x} - \frac{t^{1-x}}{1+t}$ donc $f(x) = \frac{1}{1-x} - \int_{t=0}^1 \frac{t^{1-x}}{1+t} dt + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}$.
- 4) $f(1/n) = (t = u^n) = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{nu^{n-1} du}{u(1+u^n)} = (v = 1/u) = \int_{v=0}^{+\infty} \frac{n dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$ (formule bien connue...)

Exercice 51.

Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = 0$ pour tout n . Sinon,
 $u_n = \Im \left(\int_{t=0}^1 \sum_{k=1}^n t^{n+k-1} e^{ik\alpha} dt \right) = \Im \left(\int_{t=0}^1 \frac{t^n e^{i\alpha} - t^{2n} e^{i(n+1)\alpha}}{1 - t e^{i\alpha}} dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par convergence dominée.

Exercice 52.

$$I_a = \int_{x=-a}^a |f(x)| dx \leq \int_{x=-a}^a \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|(1+|t|)}} dt dx = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-a}^a \frac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|(1+|t|)}} dx dt.$$

On a $\int_{x=-a}^a e^{-|x+t|} dx = \begin{cases} 2 - 2e^{-a} \operatorname{ch} t & \text{si } |t| < a \\ 2e^{-|t|} \operatorname{sh} a & \text{si } |t| \geq a, \end{cases}$

donc $I_a \leq \int_{t=0}^a \frac{2 dt}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_{t=a}^{+\infty} \frac{4e^{-t} \operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}} dt = 4 \arctan(\sqrt{a}) + \frac{4e^{-a} \operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}} \leq \text{cste.}$

Exercice 53.

- 1) $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t) e^{-kxt} dt$.
 On a $|\sin(t) e^{-kxt}| \leq t e^{-kxt}$ et $\int_{t=0}^{+\infty} t e^{-kxt} dt = \frac{1}{k^2}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t) e^{-kxt}| dt$ converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \sin(t) e^{-kxt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 x^2 + 1}$.
- 2) Sachant (?) que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{x \sin t}{e^{xt} - 1} - \frac{\sin t}{t} \right) dt \\ &= \int_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \sin\left(\frac{u}{x}\right) du \\ &= -x \left[\underbrace{\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right)}_{\xrightarrow{u \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{u}{x}\right) \right]_{u=0}^{+\infty} + x \int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{-e^u}{(e^u - 1)^2} + \frac{1}{u^2} \right)}_{\xrightarrow{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{12}} \cos\left(\frac{u}{x}\right) du \\ &= x(\text{quantité bornée}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Exercice 54.

Fonction de x de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, décroissante de limite $\pi/2$ en 0^+ et 0 en $+\infty$. Demi-tangente verticale en 0^+ , Équivalente à $1/x$ en $+\infty$ (par IPP). Équation différentielle : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Exercice 55.

2) Intégrer par parties : $\varphi(x) = \underbrace{\left[\frac{e^{itx}}{ix} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_{t=0}^{+\infty}}_{=-1/ix} - \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{ix} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$. On peut alors dériver

sous l'intégrale pour $x \neq 0$ sans problème.

3) Pour $x > 0$ on pose $u = tx$ dans l'intégrale : $\varphi(x) = x \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{x^2 + u^2} du$, d'où

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{x^2 + u^2} du - 2x^2 \int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{(x^2 + u^2)^2} du \\ &= \int_{u=0}^{+\infty} e^{iu} \frac{u^2 - x^2}{(x^2 + u^2)^2} du \\ &= \underbrace{\left[e^{iu} \frac{-u}{x^2 + u^2} \right]_{u=0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{u=0}^{+\infty} \frac{iue^{iu}}{x^2 + u^2} du. \end{aligned}$$

L'intégration par parties est justifiée par la convergence de deux termes sur trois (et donc l'inégrale obtenue pour φ' est elle aussi convergente).

Pour $x < 0$ les calculs sont similaires avec $\int_{u=0}^{-\infty}$ au lieu de $\int_{u=0}^{+\infty} \dots$

Exercice 56.

1) $[0, +\infty[$.

3) $f(x) - f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2x} dt = (u = t\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

4) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u^2}}{x + u^2} du = \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u^2}}{1 + u^2/x} du \sim \frac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

Exercice 57.

2) Thm de Fubini : $\int_{x=0}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{x=0}^{+\infty} \Re e(e^{(-\alpha + i \sin \theta)x}) dx d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\alpha \theta}{\alpha^2 + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$

(couper en $\theta = \pi/2$ et poser $u = \tan \theta$).

Exercice 58.

$I'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} (\cos t - e^{-t})e^{-xt} dt = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$ donc $I(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right) + \text{cste}$ et $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ d'où $\text{cste} = 0$. Alors $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Exercice 60.

$D_f =]0, +\infty[$. Il y a domination locale, donc f est continue.

De même, pour $x > 0$ on a $f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1} + t + 1)^2} dt$.

En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u = 1/t$ dans l'intégrale sur $[1, +\infty[$ il vient :

$f'(x) = \int_{t=0}^1 \ln(t)t^{x+1} \left(\frac{1}{(t + t^{x+1} + t^{x+2})^2} - \frac{1}{(t^{x+1} + t + 1)^2} \right) dt < 0$ car $\ln(t) < 0$ et $t^{x+2} < 1$ si $t \in]0, 1[$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

$\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t} = \int_{t=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}} dt = (\text{domination du reste avec le CSA}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)x} = \frac{\ln 2}{x}$.

$\left| f(x) - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} + t} \right| = \int_{t=0}^1 \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1} + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{(t^{x+1} + t)(t^{x+1} + t + 1)} \leq \int_{t=0}^1 \frac{dt}{t + 1} + \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} =$

$2 \ln 2$ donc $f(x) = \frac{\ln 2}{x} + O_{x \rightarrow 0^+}(1)$.

Pour $x \rightarrow +\infty$, on a avec le TCM séparément sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{t=0}^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

Exercice 61.

Pour $\lambda \neq 0$: $I_n = \left[\frac{\exp(\lambda n \sin^2(x))}{2\lambda n \cos(x)} \right]_{x=0}^\alpha - \int_{x=0}^\alpha \frac{\sin(x)}{2\lambda n \cos^2(x)} \exp(\lambda n \sin^2(x)) dx = \frac{\exp(\lambda n \sin^2(\alpha))}{2\lambda n \cos(\alpha)} - \frac{1}{2\lambda n} - \frac{J_n}{2\lambda n}$ avec $0 \leq J_n \leq \frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Donc $I_n \sim \frac{\exp(\lambda n \sin^2(\alpha))}{2\lambda n \cos(\alpha)}$ si $\lambda > 0$ et $I_n \sim -\frac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda < 0$.

Exercice 62.

1) Pour $0 \leq t \leq 1$ on a $t(1-t)(n-1)! \leq t(1-t) \dots (n-t) \leq n!$ d'où $\frac{1}{6n} \leq |a_n| \leq 1$ et $R = 1$.

2) $(-1)^n a_n = \int_{t=0}^1 t(1-t)(1-t/2) \dots (1-t/n) dt$. Pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ on a $x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2$ (étude de fonction) donc pour $k \geq 2$ et $0 \leq t \leq 1$: $e^{-t/k-t^2/k^2} \leq 1-t/k \leq e^{-t/k}$ d'où :

$$b_n = \int_{t=0}^1 t(1-t)e^{-t(H_n-1)-t^2 K_n} dt \leq (-1)^n a_n \leq \int_{t=0}^1 t e^{-t H_n} dt = c_n$$

avec $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ et $K_n = 1/2^2 + \dots + 1/n^2$.

Équivalent du majorant :

$$c_n = \frac{1 - (1 + H_n)e^{-H_n}}{H_n^2} \sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Équivalent du minorant :

$$\begin{aligned} b_n &\geq \int_{t=0}^1 t(1-t)(1-t^2 K_n)e^{-t(H_n-1)} dt \\ &= \int_{t=0}^1 t e^{-t(H_n-1)} dt - \int_{t=0}^1 t^2(1+t(1-t)K_n)e^{-t(H_n-1)} dt \\ &\geq \int_{t=0}^1 t e^{-t(H_n-1)} dt - (1 + \frac{1}{4}K_n) \int_{t=0}^1 t^2 e^{-t(H_n-1)} dt \\ &\geq \frac{1 - H_n e^{1-H_n}}{(H_n - 1)^2} - (1 + \frac{1}{4}K_n) \frac{2 - (H_n^2 + 1)e^{1-H_n}}{(H_n - 1)^3} \\ &\sim \frac{1}{H_n^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $a_n \sim \frac{(-1)^n}{H_n^2} \sim \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Exercice 63.

1) $\sum u_n(t)$ converge pour $|t| < 1$.

2) $P_n(t) = t^{n+1} \sin(nx) - t^n \sin((n+1)x) + \sin(x)$, $Q(t) = t^2 - 2t \cos(x) + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq \sin^2 x$.

3) Pour $|t| < 1$ on a $S_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\sin t}{Q(t)}$ et il y a convergence dominée vu la minoration de Q donc l'intégrale

$$\text{suit : } \int_{t=0}^1 S_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{t=0}^1 \frac{\sin x dt}{t^2 - 2t \cos x + 1} = (t - \cos x = u \sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan(x/2)} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi - x}{2}.$$

4) $\frac{\sin(nx)}{n} = \int_{t=0}^1 u_n(t) dt$ d'où $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.

Exercice 64.

2) $\sin^2(nt) = \frac{1 - \cos(2nt)}{2}$, donc il suffit d'étudier $I_n = \int_{t=0}^{n\pi} \cos(2nt) f(t) dt$.

Posons $I_{n,p} = \int_{t=0}^{\min(n,p)\pi} \cos(2nt) f(t) dt$: on a $|I_n - I_{n,p}| \leq \int_{t=p\pi}^{+\infty} |f(t)| dt$, quantité indépendante de n et tendant vers 0 quand $p \rightarrow \infty$ donc le théorème d'interversion des limites s'applique :

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} I_{n,p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,p} = 0$. On en déduit $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2} \int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 65.

- 1) $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ et $f_n(1) = 1$ donc $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
- 2) a) Non, la continuité n'est pas conservée.
b) Oui, il y a décroissance évidente.
- 3) Changement de variable $u = \left(\frac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \frac{2}{n(n-1)} \int_{u=1/2^n}^1 (2u^{1/n} - 1)^{2/(n-1)} u^{1/n} du$ et l'intégrale tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée.

Exercice 66.

Il y a convergence si et seulement si $x > -1$.

$$f'(x) = \int_{t=0}^1 (1-t)t^x dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, \text{ donc } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + C \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } C = 0.$$

Exercice 67.

- 1) $]1, +\infty[$.
- 3) $I'(a) = -\int_{x=0}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-ax} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right)$. D'où $I(a) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \text{cste}$ et $I(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$ donc la constante est nulle.

Exercice 68.

- 1) Intégrer par parties.
- 2) Intégrer deux fois par parties.
- 3) Pour $0 < u < v$: $\int_{t=u}^v e^{-it^2/2} dt = \left[\frac{e^{-it^2/2}}{-it} \right]_{t=u}^v - \int_{t=u}^v \frac{e^{-it^2/2}}{it^2} dt \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} \frac{e^{-iu^2/2}}{iu} - \int_{t=u}^{+\infty} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2} dt$.
Ainsi $\int_{t=u}^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$ converge et de même pour $\int_{t=-\infty}^{-u} e^{-it^2/2} dt$.
- 4) On pose $f(t) = f(0) + t\varphi(t)$ avec φ de classe \mathcal{C}^1 . Il vient :

$$g(x)\sqrt{x} = f(0) \int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2} du - \frac{1}{i\sqrt{x}} \left[e^{-iu^2/2} \varphi(u/\sqrt{x}) \right]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} + \frac{1}{ix} \int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2} \varphi'(u/\sqrt{x}) du$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0).I$$

Exercice 70.

- 1) Les intégrales sont convergentes par limite finie en un point fini. On a $f'(0) = \frac{1}{2}$, $g'(0) = 0$.
- 2) $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2}\right)$ donc $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge.
- 3) $\int_{t=2k\pi}^{(2(k+1)\pi)} \frac{1 - \cos t}{t} dt \geq \int_{t=2k\pi}^{(2(k+1)\pi)} \frac{1 - \cos t}{2(k+1)\pi} dt = \frac{1}{k+1}$. La série étant divergente, $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} dt$ diverge.
- 4) f définit une bijection continue strictement croissante de $] -\infty, +\infty[$ sur $] -\ell, \ell[$. La fonction réciproque est elle aussi strictement croissante continue. Ainsi a_n existe est unique et la suite (a_n) est strictement décroissante de limite nulle.
- 5) $b_n = g^{-1}(1 + \dots + 1/n)$.

Exercice 71.

L'intégrale définissant F converge absolument car φ est bornée. On remarque qu'il suffirait en fait que φ soit dominée par une fonction polynomiale et on prendra cela comme hypothèse dans la récurrence ci-dessous. Si φ est de signe constant, F a ce même signe constant. Si φ change de signe en $a \in]0, +\infty[$ alors $F'(\lambda) + aF(\lambda) = \int_{x=0}^{+\infty} \varphi(x)(a-x)e^{-\lambda x} dx$ est de signe constant, donc $\lambda \mapsto e^{a\lambda}F(\lambda)$ est monotone et change au plus une fois de signe. Pour n quelconque, on procède par récurrence sur n : si a un point de changement de signe pour f alors $d(e^{a\lambda}F(\lambda))/d\lambda$ change au plus $n-1$ fois de signe donc avec le théorème de Rolle, $e^{a\lambda}F(\lambda)$ change au plus n fois de signe.

Exercice 72.

L'intégrande tend simplement vers e^{-x} ; il reste à dominer. Pour $x \geq 0$ on a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Cette expression est une fonction croissante de n à x fixé. Ainsi, $(1 + x/n)^n \geq (1 + x/3)^3$ pour $n \geq 3$, puis $0 \leq x^{-1/n}(1 + x/n)^{-n} \leq \max(1, x)(1 + x/3)^{-3}$, quantité intégrable. La limite demandée est donc $\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

Exercice 73.

$\int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ en décroissant par convergence dominée donc la série converge. En regroupant les termes deux par deux, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme cas réel positif d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n(t) dt = \int_{t=0}^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos^n(t) dt = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = (u = \tan(t/2)) = 1.$$

Exercice 74.

$\frac{1}{t + \ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{1}{1 + t/\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{\ln^k(n)}$ pour tout t tel que $|t| < \ln(n)$ donc pour tout $t \in [a, b]$ si $n > e^{\max(|a|, |b|)}$. De plus, la convergence est alors normale donc, φ étant bornée sur $[a, b]$, on obtient par intégration terme à terme :

$$\sum_n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{t=a}^b (-1)^k \varphi(t) t^k dt \right) \frac{1}{\ln^{k+1}(n)} \text{ converge.}$$

Si les intégrales $\int_{t=a}^b \varphi(t) t^k dt$ ne sont pas toutes nulles alors la somme de la série interne est équivalente, à un facteur près, à $1/\ln^{k+1}(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour le plus petit k donnant une intégrale non nulle. Or les séries de termes généraux $1/\ln^{k+1}(n)$ sont toutes divergentes. Ainsi toutes les intégrales sont nulles et φ est orthogonale à toutes les fonctions $t \mapsto t^k$ pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Avec le théorème de Stone-Weierstrass, on conclut que $\varphi = 0$ (qui effectivement convient).