Intégrales multiples

Exercice 1. *Intégrales doubles*

Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \ldots$

1) $D=\{y\geqslant 0, x+y\leqslant 1, y-x\leqslant 1\}$, $f(x,y)=x^2y$.

2) $D=\{x^2+y^2\leqslant R^2\}$, $f(x,y)=x^2y$.

3) $D=\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$, $f(x,y)=x^2+y^2$.

4) $D=\{0\leqslant x\leqslant 1-y^2/4\}$, $f(x,y)=x^2+y^2$.

5) $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f(x,y)=(x+y)^2$.

6) $D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.

7) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$, $f(x,y)=x+y+1$.

8) $D=\{|x+y|\leqslant 1, |x-y|\leqslant 1\}$, $f(x,y)=\ln(x+y+1)$.

9) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant \pi\}$, $f(x,y)=(x+y)\sin x\sin y$.

10) $D=\{|x|\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f(x,y)=(1+x^2+y^2)^2$.

11) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant a\}$, $f(x,y)=x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.

12) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\}$, $f(x,y)=xy\sqrt{x^2+4y^2}$.

13) $D=\{x^2+y^2-2y\leqslant 0\}$, $f(x,y)=y\exp(x^2+y^2-2y)$.

14) $D=\{y^2\leqslant 2px, x^2\leqslant 2py\}$, $f(x,y)=\exp\left(\dfrac{x^3+y^3}{xy}\right)$.

15) $D=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\}$, $f(x,y)=1/(1+x^2\tan^2 y)$.

Exercice 2. *ESEM 94*

Calculer $I=\iint_\Delta xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\Delta=\{(x,y)$ tq $y\geqslant 0$ et $(x+y)^2\leqslant 2x/3\}$.

Exercice 3. *Ensi PC 1999*

Calculer $I=\iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $\Delta=\{(x,y)$ tq $y\geqslant 0$ et $x^2+y^2-2x\leqslant 0$ et $x^2+y^2-2y\leqslant 0\}$.

Exercice 4. *Intégrales triples*

Calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \ldots$

1) $D=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.

2) $D=\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ $\quad(a>R>0)$.

3) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x+y+z\leqslant 1\}$, $f(x,y,z)=xyz$.

4) $D=\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x+y+z\leqslant 1\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^2}$.

5) $D=\{x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant a\}$, $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.

6) $D=\{x^2+y^2\leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant 1\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.

7) $D=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2$.

Exercice 5. *Ensi Chimie P 93*

1) Calculer $\iiint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$ avec $D=\{(x,y,z)$ tq $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\}$.

2) En déduire $\int_{t=0}^{+\infty}\left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 6. *Ensi Chimie P 93*

Soit $I=\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

En calculant $J=\iint_D \dfrac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D=\{(x,y)$ tq $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ de deux façons différentes, trouver I.

Exercice 7. *Ensi Chimie P 93*

Soit T un tore plein d'axe Oz et de rayons R, r ($R > r$). Calculer $\iiint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Exercice 8. $MF + MF'$

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$), E le domaine limité par $\mathcal{E}$ et F, F' les foyers de $\mathcal{E}$.

Calculer $I = \iint_{M\in E} (MF + MF')\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

On effectuera le changement de variable : $x = \sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y = u\sin v$ où $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

Exercice 9. $\int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$

1) Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$.

2) Montrer que $I = \iint_D \dfrac{\sin y}{1+\cos x\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.

3) En déduire la valeur de I.

Exercice 10. *Intégrale de Gauss*

Calcul de $I = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier la convergence de cette intégrale.

2) Pour $a > 0$ on note $\Delta_a = [0, a] \times [0, a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

- **a)** Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b.
- **b)** Calculer $\iint_{C_b} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en polaires et en déduire la valeur de I.

Exercice 11. $\int_{t=0}^{1} \dfrac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

1) Calculer $A = \iint_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

2) Démontrer la convergence des intégrales :

$B = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \dfrac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}\theta$, $C = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \dfrac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta}\theta$, et $D = \int_{t=0}^{1} \dfrac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3) Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnées polaires dans A).

4) Calculer $B + C$ et $B - C$ en fonction de D.

5) En déduire les valeurs de C et D.

6) En déduire enfin les sommes des séries $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 12. *Aires*

Calculer l'aire des domaines suivants :

1) D est la partie du disque unité située dans la concavité de l'hyperbole d'équation $xy = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) D est l'intersection des domaines limités par les ellipses d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

Exercice 13. *Ensi P 90*

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Exercice 14. *Chimie P 91*

On considère les courbes planes : $\mathcal{Q}_i$: $x^2 = 2q_i y$ et $\mathcal{P}_i$: $y^2 = 2p_i x$. On suppose $0 < q_1 < q_2$ et $0 < p_1 < p_2$. Calculer l'aire du «quadrilatère» limité par $\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$,$\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.

Exercice 15. *Chimie P 1996*

Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y - x)^2 = a^2 - x^2$.

Exercice 16. *Volumes*

Calculer le volume des domaines suivants :

1) D est l'intersection du cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de la boule de centre O de rayon 1 $(0 < a < 1)$.

2) D est l'intersection de la boule de centre O de rayon 1 et du cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$.

3) D est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite coplanaire avec le disque, située à la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre à air).

Exercice 17. *Ensi Physique P 94*

Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ $(p > 0,\ \lambda > 0)$.

Exercice 18. *Volume*

Dans le plan Oxy on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a > 0,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$. En tournant autour de Ox, γ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite (on posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $z = \rho\sin\theta\sin\varphi$).

Exercice 19. *Volume*

On coupe une demi-boule par un plan P parallèle à sa base. Quelle doit être la position de P pour que les deux morceaux aient même volume (donner un résultat approché) ?

Exercice 20. *Somme double*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} f(i/n)f(j/n)$.

Exercice 21. *Nombre de couples (a, b) tq $a^2 + b^2 \leqslant n$*

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } p^2 + q^2 \leqslant n\}$ et $C_n = \operatorname{card}(E_n)$.
Interpréter C_n comme une aire et donner un équivalent de C_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 22. *Ens MP 2002*

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^1 f = 1$. Pour $\psi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose

$$\lambda_n(\psi) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \psi\Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big) f(x_1)\dots f(x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n.$$

Montrer que $\lambda_n(\psi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi\Big(\int_{x=0}^1 x f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$.

solutions

Exercice 1.

1) $\frac{1}{30}$.
2) 0.
3) $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.
4) $\frac{96}{35}$.
5) $\frac{\pi}{2}$.
6) $\pi(1-\ln 2)$.
7) $\frac{5}{6}$.
8) $2(\ln 2-1)$.
9) $\frac{3\pi}{2}$.
10) $\frac{65\pi}{48}$.
11) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.
12) $\frac{7}{45}$.
13) $\pi(1-1/e)$.
14) $\dfrac{(e^{2p}-1)^2}{3} \quad (x=u^2v, y=uv^2)$.
15) $-\int_{t=0}^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Exercice 2.
Poser $u=x, v=x+y$. On obtient $I=\frac{2}{1701}$.

Exercice 3.
symétrie + passage en polaires. $I=\frac{3}{4}\pi-\frac{11}{6}$.

Exercice 4.

1) $\frac{1}{2}\ln(32/27)$.
2) $2\pi a^2\arcsin(R/a)-2\pi R\sqrt{a^2-R^2}$.
3) $\frac{1}{720}$.
4) $\frac{3}{4}-\ln 2$.
5) $\frac{1}{4}\pi R^2a^2(a^2+3R^2)$.
6) $\frac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.
7) $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$.

Exercice 5.

1) Intégrer en z d'abord : $\dfrac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}=\dfrac{1}{x^2-y^2}\left(\dfrac{x^2}{1+x^2z^2}-\dfrac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$. On obtient $I=\pi\ln 2$.

2) Intégrer I en x et y d'abord. On obtient $I=\int_{z=0}^{+\infty}\left(\dfrac{\arctan z}{z}\right)^2\mathrm{d}z$.

Exercice 6.
$I=\dfrac{\pi\ln 2}{8}$.

Exercice 7.
$\frac{1}{2}\pi^2Rr^2(4R^2+3r^2)$.

Exercice 8.
$2\pi b(a^2-\frac{1}{3}b^2)$.

Exercice 9.

3) Fubini $\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 11.

1) $2A = \left(\int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)^2 \Rightarrow A = \dfrac{\pi^2}{32}$.

4) $B + C = \dfrac{D}{2}$, $B - C = -D$.

5) $C = -\dfrac{3\pi^2}{32}$, $D = -\dfrac{\pi^2}{8}$.

Exercice 12.

1) $A = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.

2) $4ab\arctan(b/a)$.

Exercice 13.

Formule de Green : $A = \frac{3\pi}{8}a^2$.

Exercice 14.

Formule de Green. $A = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

Exercice 15.

Formule de Green. $A = \pi a^2$.

Exercice 16.

1) $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.

2) $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

3) $V = 2\pi^2 R r^2$.

Exercice 17.

$V = \dfrac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Exercice 18.

$\dfrac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2})$.

Exercice 19.

hauteur $= \alpha R$ avec $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha \approx 0.347$.

Exercice 22.

C'est manifestement vrai pour $\psi = 1$ et aussi pour $\psi(t) = t$. De manière générale, si $\psi(t) = t^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors pour $n \geqslant k$, $(x_1 + \ldots + x_n)^k$ est une somme de n^k monômes parmi lesquels il y a $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ monômes où chaque variable apparaît avec l'exposant 0 ou 1. On a alors :

$$\lambda_n(\psi) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big(\int_{x=0}^{1} x f(x)\,\mathrm{d}x\Big)^k \Big(\int_{x=0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{n-k} + \Big(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\Big)O(1),$$

ce qui prouve que $\lambda_n(\psi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi\Big(\int_{x=0}^{1} x f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$ lorsque $\psi(t) = t^k$. Par linéarité, cette relation est encore vraie pour tout ψ polynôme. On conclut pour ψ continue quelconque avec le théorème de Stone-Weierstrass.