# Intégrales généralisées

**Exercice 1.** *Étude de convergence*

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

**1)** $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + t^2 e^{-t}}$ **2)** $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

**4)** $\displaystyle\int_{t=e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$ **5)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \ln\Bigl(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Bigr)\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \Bigl(2 + (t+3)\ln\bigl(\frac{t+2}{t+4}\bigr)\Bigr)\mathrm{d}t$

**7)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$ **9)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$

**10)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\arccos t}$ **12)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

**13)** $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^\alpha}$ **14)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **15)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} t^\alpha\bigl(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\bigr)\,\mathrm{d}t$

**16)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \sin(1/t)e^{-1/t}t^{-k}\,\mathrm{d}t$

**Exercice 2.** *Calcul, fractions rationnelles*

Prouver la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

**1)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ **2)** $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$ **3)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^4}$

**4)** $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)}$ **5)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+a^2)}$

**7)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ **8)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$ **9)** $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^6(1+t^{10})}$

**Exercice 3.** *Calcul, fonctions trigonométriques*

Prouver la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

**1)** $\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}$ **2)** $\displaystyle\int_{t=-\pi}^{\pi} \frac{2\mathrm{d}t}{2+\sin t+\cos t}$ **3)** $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$

**4)** $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{3\tan t+2}$ **5)** $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(a\sin^2 t+b\cos^2 t)^2}$ **6)** $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/4} \cos t\ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$

**Exercice 4.** *Calcul, radicaux*

Prouver la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

**1)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_{t=1}^{10} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t-2}}$ **3)** $\displaystyle\int_{t=a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$

**4)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{t^5\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ **5)** $\displaystyle\int_{t=-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ **6)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}}$

**7)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$ **8)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt[3]{t^2-t^3}}$ **9)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \arctan\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

**10)** $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}}$ **11)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{t}}$

**Exercice 5.** *Calcul, divers*

Prouver la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

**1)** $\displaystyle\int_{t=2}^{+\infty}\frac{e^t\,\mathrm{d}t}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)}$ **2)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^4 t+\operatorname{sh}^4 t}$ **3)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

**4)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\arcsin t\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$

**7)** $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ **9)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

**10)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ **11)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$ **12)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\ln\Big(1+\frac{a^2}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t$

**13)** $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{t\,\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^2}$

**Exercice 6.** *Centrale PC 1999*

Soit $(a_k)$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k=0$. Étudier la convergence de $\int_{t=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^n a_k\cos(a_kt))\,\mathrm{d}t/t$.

**Exercice 7.** *Chimie P 91*

Existence et calcul de $f(x)=\int_0^\pi \mathrm{d}t/(1-x\cos t)$.

**Exercice 8.** *Chimie P 1996*

Convergence et calcul de $\int_{t=0}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t/\operatorname{sh} t$ (on pourra décomposer l'intégrande en somme d'une série de fonctions).

**Exercice 9.** *Calcul par récurrence*

On pose $I_n=\int_{t=0}^{\pi/2}\cos(2nt)\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Calculer $2nI_n-(2n+2)I_{n+1}$ et en déduire $I_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 10.** *Calcul par récurrence*

Soit $\alpha\in\,]0,\pi[$ et $\displaystyle I_n=\int_{t=0}^{\pi}\frac{\cos nt\,\mathrm{d}t}{1-\sin\alpha\cos t}$.

Calculer $I_n+I_{n+2}$ en fonction de $I_{n+1}$ puis exprimer $I_n$ en fonction de $\alpha$ et $n$.

**Exercice 11.** *Calcul par récurrence*

Calculer par récurrence : $\displaystyle I_n=\int_{t=0}^{1}\frac{t^n\,\mathrm{d}t}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$.

**Exercice 12.** *Mines-Ponts 1999*

Calculer $\displaystyle I_n=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$.

**Exercice 13.** *Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,\mathrm{d}t$*

**1)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

**2)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle I_n=\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est comprise entre les intégrales $\displaystyle A_n=\int_{t=0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $B_n=\int_{t=0}^{\pi/2}\operatorname{cotan}^2 t\sin^2 nt\,\mathrm{d}t$.

**3)** Calculer $A_n+A_{n+2}-2A_{n+1}$ et $A_n-B_n$. En déduire les valeurs de $A_n$ et $B_n$ en fonction de $n$.

**4)** Montrer que $\displaystyle\frac{I_n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J=\int_{t=0}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et donner la valeur de cette dernière intégrale.

**Exercice 14.** *$\int_0^\infty$ périodique$/t\,\mathrm{d}t$*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, périodique de période $T>0$. On note $m=\frac{1}{T}\int_{t=0}^T f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\int_{t=T}^{+\infty} f(t)/t\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $m=0$.

**Exercice 15.** $\int_1^\infty f(t)/t\,\mathrm{d}t$

Soit $f$ une application continue de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)/t\,\mathrm{d}t$. On pourra introduire la fonction $F(x)=\int_{t=1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 16.** *Polynôme*$\times e^{-t}$

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (a_0,\dots,a_n) \end{cases}$ avec $a_k=\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}t^kP(t)\,\mathrm{d}t$.

**1)** Justifier l'existence de $\varphi$.

**2)** Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme d'ev.

**Exercice 17.** *Constante d'Euler*

Calculer $\displaystyle\int_{t=1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en fonction de la constante d'Euler.

**Exercice 18.** *Constante d'Euler*

Soit $\gamma$ la constante d'Euler. Montrer que ...

**1)** $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t=-\gamma$. **2)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t=\gamma$. **3)** $\displaystyle\int_{t=0}^{1}\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln(1-t)}\Big)\mathrm{d}t=\gamma$.

**Exercice 19.** *Sommes de Riemann*

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}^+$ continue croissante. On pose $S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a+k\dfrac{b-a}{n}\Big)$.

**1)** Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, montrer que $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t=a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

**2)** Si $\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, montrer que $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exercice 20.** *Sommes de Riemann*

Calculer $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

**Exercice 21.** *Comparaison série-intégrale*

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**1)** Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de $f$.

**2)** Application : Pour $\alpha>1$, donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha}$.

**Exercice 22.** *Comparaison série-intégrale*

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. On pose, sous réserve de convergence, $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$ pour $t>0$.

**1)** Si $f$ est monotone et intégrable, montrer que $g(t)$ existe pour tout $t>0$ et que l'on a :
$tg(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$.

**2)** Même question en supposant $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f$,$f'$ intégrables.

**3)** On suppose maintenant $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f$, $f'$, $f''$ intégrables.
Montrer que $g(t)=\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f+\frac{1}{2}f(0)+\mathrm{O}_{t\to0^+}(t)$.

**Exercice 23.** *Valeur moyenne d'une variable aléatoire à densité*

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose $F(x)=\int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**1)** Justifier l'existence de $F(x)$, et montrer que $F(x)=\mathrm{o}(1/x)$ pour $x\to+\infty$.

**2)** Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$.

**Exercice 24.** $\int_0^\infty f(t)/t^2\,\mathrm{d}t$

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\exists\,\alpha>0$ tq $\forall\,x\geqslant0,\ f'(x)\geqslant\alpha$. Montrer que $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)/t^2\,\mathrm{d}t$ diverge.

**Exercice 25.** $x(f(x)-f(x+1))$

Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\int_{t=1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis que $\int_{t=1}^{+\infty} t(f(t)-f(t+1))\,\mathrm{d}t$ converge, et calculer la valeur de cette intégrale.

**Exercice 26.** $f(|t-1/t|)$

Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=0}^{+\infty} f(|t-1/t|)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 27.** $(f(ax)-f(x))/x$

**1)** Soit $f : ]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$ avec $\ell, L\in\mathbb{R}$.

Pour $a>0$, établir la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

**2)** Application : Calculer $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 28.** $f(t+a)-f(t)$, *Ensi PC 1999*

**1)** Soit $f : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty}(f(t+a)-f(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

**2)** Calculer $\int_{t=0}^{+\infty}(\arctan(t+1)-\arctan(t))\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 29.** *Valeur moyenne sur* $[x-1,x+1]$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. On pose $F(x)=\frac{1}{2}\int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer le même résultat en supposant seulement la convergence de $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

**Exercice 30.** $(\int tf(t)\,\mathrm{d}t)/x$

Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 31.** $f$ *uniformément continue*

Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**1)** Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (raisonner par l'absurde).

**2)** Si $f$ est positive, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**3)** Donner un contre-exemple si $f$ n'est pas de signe constant.

**Exercice 32.** $f$ *décroissante* $\Rightarrow xf(x)\to 0$

Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**1)** Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$, combien vaut $L$ ?

**2)** Donner un exemple où $f$ n'a pas de limite en $+\infty$.

**3)** Si $f$ est décroissante, montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 33.** $\int e^{-t}/t, \mathrm{d}t$

On pose $f(x)=\int_{t=x}^{+\infty} e^{-t}/t\,\mathrm{d}t$.

**1)** Chercher $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**2)** A l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $f(x)$ pour $x\to+\infty$.

**3)** Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x\to 0^+$.

**Exercice 34.** *Intégrale de Gauss*

**1)** Montrer que pour $0\leqslant x\leqslant\sqrt{n}$ on a : $(1-\frac{x^2}{n})^n\leqslant e^{-x^2}$ et pour $x$ quelconque : $e^{-x^2}\leqslant(1+\frac{x^2}{n})^{-n}$.

**2)** Calculer les intégrales $I_n=\int_{t=0}^{\sqrt{n}}(1-\frac{t^2}{n})^n\,\mathrm{d}t$ et $J_n=\int_{t=0}^{+\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{-n}\,\mathrm{d}t$ en fonction des intégrales : $K_p=\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^p t\,\mathrm{d}t$.

**3)** On admet que $K_p\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$ quand $p\to\infty$. Calculer $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 35.** *Intégrales de Gauss*

On admet que $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer les intégrales : $I_n=\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}t^{2n}\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$.

**Exercice 36.** *Mines-Ponts MP 2005*
Nature et calcul de $\int_{x=0}^{+\infty} \exp(-(x-1/x)^2)\,\mathrm{d}x$ ?

**Exercice 37.**
Existence de $\int_{x=0}^{+\infty} \sin(x^4+x^2+x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 38.** $\cos(P(t))$
Soit $P$ un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \cos(P(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exercice 39.** *Ensi PC 1999*
Soient $I = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

**Exercice 40.** *$f$ et $f''$ de carrés sommables*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{t=0}^{+\infty} f''^2(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exercice 41.** $f' \leqslant 1$, *Ulm 1999*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable.
**1)** On suppose $f' \leqslant 1$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
**2)** Est-ce encore vrai si on suppose seulement $f' \leqslant 1+g$ avec $g$ intégrable ?

**Exercice 42.** *Intégrales emboitées*
Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{t=x}^{+\infty} \sin(t)/t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 43.** *Centrale MP 2001*
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f^2$ et $f''^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $ff''$ et $f'^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que $f$ est uniformément continue et qu'elle tend vers zéro en $+\infty$.

**Exercice 44.** *X MP* 2000*
Donnez un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\int_{t=0}^{x} |\sin(t)/t|\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 45.** *Centrale MP 2010*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable. On définit la fonction $g$ telle que $g(x) = \dfrac{1}{x}\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
**1)** Prolonger par continuité la fonction $g$ en 0.
**2)** **a)** Montrer que, pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\int_{t=a}^{b} g^2(t)\,\mathrm{d}t = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
**b)** Montrer que $\int_{t=a}^{b} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant ag^2(a) + 2\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$.
**c)** En déduire que $\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2} + \left(\int_0^{+\infty} f^2 + ag^2(a)\right)^{1/2}$.
**3)** Montrer que $g$ est de carré intégrable et que $fg$ est intégrable.

**Exercice 46.** *Comparaison série-intégrale, Mines 2013*
A partir du développement de Taylor avec reste intégral de $f(x) = \int_{t=1}^{x} \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$, étudier la convergence de $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$. Même question pour $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

## solutions

**Exercice 1.**

**1)** cv
**2)** dv
**3)** cv ssi $\alpha > -1$
**4)** dv
**5)** dv
**6)** cv
**7)** cv ssi $\alpha > 1$
**8)** dv
**9)** cv ssi $\alpha < \beta < \min(1, 1+\alpha)$ ou $\alpha = 0$
**10)** cv
**11)** cv
**12)** dv
**13)** cv ssi $0 < \alpha < 1$
**14)** cv ssi $\alpha < \beta + 1$
**15)** cv ssi $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$
**16)** cv

**Exercice 2.**

**1)** $\frac{\pi}{4}$
**2)** $\pi$
**3)** $\frac{5\pi}{32}$
**4)** $\frac{\pi}{2|\sin\alpha|}$
**5)** $\frac{3\pi}{4}$
**6)** $\frac{\pi}{1+|a|}$
**7)** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
**8)** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
**9)** $\frac{4-\pi}{20}$

**Exercice 3.**

**1)** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
**2)** $2\pi\sqrt{2}$
**3)** $= \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
**4)** $\dfrac{\pi + 3\ln(3/2)}{13}$
**5)** $\dfrac{\pi(a+b)}{2\sqrt{ab}^3}$
**6)** $-\ln(1+\sqrt{2})$

**Exercice 4.**

**1)** $\frac{\pi}{2}$
**2)** $\frac{9}{2}$
**3)** $\pi$
**4)** $\frac{8}{15}$
**5)** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
**6)** $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
**7)** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
**8)** $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
**9)** $\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}$
**10)** $\frac{1}{5}\ln(1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$
**11)** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

**Exercice 5.**

**1)** $\ln(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}})$
**2)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$
**3)** $12$
**4)** $\frac{\pi}{2} - 1$
**5)** $-2\ln 2$
**6)** $-\frac{1}{32}$
**7)** $-\frac{\pi \ln 2}{2}$
**8)** $4\ln 2 - 4$ $(u = \sqrt{1-t})$
**9)** $0$ $(u = 1/t)$
**10)** $\ln 2 - \frac{\pi}{2}$ $(u = \sqrt{(1-t)/(1+t)})$
**11)** $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)$
**12)** $\pi|a|$
**13)** $\dfrac{\pi}{2|a|(a^2+1)}$

**Exercice 7.**

$f(x) = \pi/\sqrt{1-x^2}$ pour $-1 < x < 1$.

**Exercice 8.**

$\frac{\pi^2}{4}$.

**Exercice 9.**

$2nI_n - (2n+2)I_{n+1} = 0 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$.

**Exercice 10.**

$I_n + I_{n+2} = \dfrac{2I_{n+1}}{\sin\alpha} \Rightarrow I_n = \dfrac{\pi}{\cos\alpha}\tan^n(\alpha/2)$.

**Exercice 11.**

$I_n = \pi\sqrt{2}\prod_{k=1}^{n}\big(1 - \dfrac{3}{4k}\big)$.

**Exercice 12.**

Décomposer en éléments simples et intégrer. On obtient $I_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\ln k$.

**Exercice 13.**

**3)** $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \dfrac{n\pi}{2}$, $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ pour $n \geqslant 1$.

**4)** $J = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 17.**

$1 - \gamma$.

**Exercice 18.**

**1)** On pose $I_n = \int_{t=0}^{n} (1-t/n)^n \ln t \,\mathrm{d}t$ :

en intégrant par parties, on obtient $I_n = \dfrac{n}{n+1}\Bigl(\ln n - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\Bigr) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\gamma$.

**2)**

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(-\ln x - \int_{t=x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left((e^{-x}-1)\ln x - \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**3)** $\displaystyle\int_{t=x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = (t = -\ln(1-u)) = \int_{u=1-e^{-x}}^{1} \frac{-\mathrm{d}u}{\ln(1-u)}$.

**Exercice 20.**

$\int_{t=0}^{1} \mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 22.**

**1)** en supposant $f$ positive décroissante, $\int_0^{+\infty} f \leqslant tg(t) \leqslant tf(0) + \int_0^{+\infty} f$.

**2)** $\int_{u=pt}^{qt} f(u)\,\mathrm{d}u - \sum_{n=p}^{q-1} tf(nt) = \int_{u=pt}^{qt} (f(u) - f(t[u/t]))\,\mathrm{d}u = \int_{v=pt}^{qt} t(1-\{v/t\})f'(v)\,\mathrm{d}v \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc la série de terme général $tf(nt)$ est de Cauchy ; elle converge.

On a alors $\int_0^{+\infty} f - tg(t) = \int_{v=0}^{+\infty} t(1-\{v/t\})f'(v)\,\mathrm{d}v \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

**3)** $\int_0^{+\infty} 2f - 2tg(t) = \int_{u=0}^{+\infty} 2t(1-\{u/t\})f'(u)\,\mathrm{d}u = tf(0) - \int_{u=0}^{+\infty} t^2\{u/t\}(1-\{u/t\})f''(u)\,\mathrm{d}u$.

**Exercice 25.**

$0 \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{t=x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\int_{t=1}^{x} t(f(t)-f(t+1))\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{2} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{t=x}^{x+1} (t-1)f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t=1}^{2} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=2}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 27.**

**1)** $\displaystyle\int_{t=x}^{y} \frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=ax}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{t=x}^{y} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=ax}^{x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{t=y}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

On obtient $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = (L-\ell)\ln a$.

**2)** $\displaystyle I = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

**Exercice 28.**

**2)** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

**Exercice 29.**

$\int_{t=a}^{b} F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{u=a-1}^{a+1} (u-(a-1))f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{u=b-1}^{b+1} (b+1-u)f(u)\,\mathrm{d}u$.

$= \varphi(a+1) - \frac{1}{2}\int_{u=a-1}^{a+1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{u=b-1}^{b+1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u - \varphi(b-1)$ où $\varphi$ est une primitive de $f$.

**Exercice 30.**

Soit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ : $\frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \frac{1}{x}\int_{t=0}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 33.**

**2)** $e^{-x}/x$.

**3)** $-\ln x$.

**Exercice 34.**

**2)** $I_n = \sqrt{n}K_{2n+1}$, $J_n = \sqrt{n}K_{2n-1}$.

**3)** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Exercice 35.**

$I_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$.

**Exercice 36.**

Intégrale trivialement convergente. Couper en $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$, changer $x$ en $1/x$ dans l'une des intégrales, regrouper et poser $u = x - 1/x$. On obtient $I = \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**Exercice 37.**

L'intégrale converge par parties.

**Exercice 38.**

$\displaystyle\int^x \cos(P(t))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]^x - \int^x \sin(P(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{P'(t)}\right)\mathrm{d}t.$

**Exercice 39.**

$I = J$ par changement $u \mapsto 1/u$. $I + J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 42.**

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{X}\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \Big[x\int_{t=x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\Big]_{x=0}^{X} + \int_{x=0}^{X}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + 1 - \cos X \\
&= X\Big[\frac{-\cos t}{t}\Big]_{t=X}^{+\infty} - X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t + 1 - \cos X \\
&= -X\Big[\frac{\sin t}{t^2}\Big]_{t=X}^{+\infty} - X\int_{t=X}^{+\infty}\frac{2\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t + 1 \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

**Exercice 43.**

$2|ff''| \leqslant f^2 + f''^2$ donc $ff''$ est intégrable. On en déduit que $f'^2$ admet une limite finie en $+\infty$, et cette limite est nulle sans quoi $f^2$ ne serait pas intégrable (si $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $f(x)/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$). Ainsi $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, $f$ est lipschitzienne et donc uniformément continue. De plus,

$$\int_{t=0}^{X} f'^2(t)\,\mathrm{d}t = f(X)f'(X) - f(0)f'(0) - \int_{t=0}^{X} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $f(X)f'(X)$ admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$, et le cas $f(X)f'(X) = \frac{1}{2}(f^2)'(X) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ contredit l'intégrabilité de $f^2$ donc ce cas est impossible, ce qui prouve que $f'^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, $ff'$ est intégrable (produit de deux fonctions de carrés intégrables) donc $f^2$ admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite vaut zéro par intégrabilité de $f^2$.

**Exercice 44.**

On pose $u_n = \int_{t=n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)/t|\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\pi} \sin(t)/(t+n\pi)\,\mathrm{d}t$. Par encadrement du dénominateur on a $u_n \sim \dfrac{2}{n\pi}$, d'où $u_0 + \ldots + u_n \sim \dfrac{2\ln n}{\pi}$ et, par encadrement encore, l'intégrale arrêtée en $x$ est équivalente à $\dfrac{2\ln x}{\pi}$.

**Exercice 45.**

**1)** $g(0) = f(0)$.

**2) a)** $\dfrac{\mathrm{d}(xg(x))}{\mathrm{d}x} = f(x)$, soit $xg'(x) = f(x) - g(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}(xg^2(x))}{\mathrm{d}x} = g^2(x) + 2xg'(x)g(x) = f(x)g(x) - g^2(x)$.

**c)** On pose $\alpha = ag^2(a)$, $\beta = \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et $\gamma = \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$.

Donc $\gamma^2 \leqslant \alpha + 2\beta\gamma$, soit $(\gamma - \beta)^2 \leqslant \alpha + \beta^2$, ce qui donne l'inégalité demandée.

**3)** $\int_0^b g^2$ est majorée indépendamment de $b$, donc $\int_0^{+\infty} g^2$ converge. $f$ et $g$ étant de carrés intégrables, $fg$ est intégrable d'après l'inégalité $2|fg| \leqslant f^2 + g^2$.

**Exercice 46.**

Indication peu claire...

On écrit $f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_{t=n}^{n+1} (n+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ et $f''(t) = \dfrac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}} - \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t^2} = O(1/t^{3/2})$ avec une constante indépendante de $t$ pour $t \geqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n} = f(n+1) - f(n) + O(1/n^{3/2})$.

L'intégrale généralisée $\int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente : écrire $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ puis intégrer par parties, donc la série de terme général $f(n+1) - f(n)$ est convergente et par addition, la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

Considérons à présent $g(x) = \int_{t=1}^{x} \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{x} \frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\sin\sqrt{x} - \sin 1)$.

On a $g'(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $g''(x) = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2x} + O(1/x^{3/2})$ et $g'''(x) = O(1/x^{3/2})$,

d'où $\dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = g(n+1) - g(n) + \dfrac{\sin\sqrt{n}}{4n} + O(1/n^{3/2})$. Ainsi, les séries $\sum(g(n+1) - g(n))$ et $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ ont même nature. Si elles convergent, alors la suite $(g(n))$ admet une limite finie et donc aussi la fonction $g$ en $+\infty$ car $g(x) = g(n) + O(1/\sqrt{n})$ pour $n \leqslant x < n+1$, vu $g'$. Or $g$ n'a pas de limite en $+\infty$, donc la série $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ est divergente.