Intégrale de Riemann

Exercice 1. *Primitives de fraction rationnelles*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{1}{x^3-1}$ **2)** $\dfrac{1}{(x^3-1)^2}$ **3)** $\dfrac{1}{x^3(1+x^3)}$ **4)** $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$

5) $\dfrac{1}{1+x^4}$ **6)** $\dfrac{x^2}{1+x^4}$ **7)** $\dfrac{x}{(x^4+1)^2}$ **8)** $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$

9) $\dfrac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$ **10)** $\dfrac{1}{x^{20}-1}$ **11)** $\dfrac{1}{(x-a)^n(x-b)}$

Exercice 2. *Primitives de fonctions trigonométriques*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{1}{\sin x\sin 4x}$ **2)** $\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$ **3)** $\cos x\sqrt{\cos 2x}$ **4)** $\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$

5) $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}$ **6)** $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$ **7)** $\dfrac{a\sin x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\sin^2 x}}$

Exercice 3. *Primitives de radicaux*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ **2)** $\dfrac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$ **3)** $\dfrac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$ **4)** $\dfrac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$

5) $\dfrac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$ **6)** $x+\sqrt{a^2+x^2}$ **7)** $(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$ **8)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

Exercice 4. *Primitives diverses*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $x^k\ln x$ **2)** $\ln(1+x^2)$ **3)** $\dfrac{x^2+a}{x^2+1}\arctan x$ **4)** $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{1/x}$

5) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$ **6)** $\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ **7)** $\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$ **8)** $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

9) $e^{\arcsin x}$ **10)** $x(\cos^2 x)e^{-x}$ **11)** $(x^2+x+1)e^{2x}\cos x$

Exercice 5. *Intégrales définies*

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{t=0}^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{d}t$ **2)** $\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$ **3)** $\int_{t=0}^{\pi/2} t^2\cos t\,\mathrm{d}t$

4) $\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} t^2\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ **5)** $\int_{t=0}^{\pi/2}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\int_{t=0}^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$

7) $\int_{t=0}^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\int_{t=0}^{\pi/2}\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{1-a\sin t}}\,\mathrm{d}t$ **9)** $\int_{t=0}^{1} t\ln t\,\mathrm{d}t$

10) $\int_{t=0}^{1}\arcsin t\,\mathrm{d}t$ **11)** $\int_{t=0}^{3}\dfrac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t$ **12)** $\int_{t=0}^{1}\dfrac{t^2\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

13) $\int_{t=0}^{\ln 2}\sqrt{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ **14)** $\int_{t=4}^{9}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}-1}$ **15)** $\int_{t=0}^{1}\dfrac{te^t}{\sqrt{e^t+1}}\,\mathrm{d}t$

16) $\int_{t=0}^{1}\dfrac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ **17)** $\int_{t=0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{2+\sqrt{1-t^2}}$ **18)** $\int_{t=-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t^2+1}}$

19) $\int_{t=-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6. *Densité des fonctions en escalier*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier, $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=0$. Démontrer que $f=0$.

Exercice 7. *Zéros*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que : $\forall\,k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\int_{t=a}^{b} t^k f(t)\,\mathrm{d}t=0$. Démontrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$ (raisonner par l'absurde).

Exercice 8. *Formule de la moyenne généralisée*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1) Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Si f ne s'annule pas, montrer qu'il existe un tel $c \in]a,b[$.

3) Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t)$.

Exercice 9. *Inégalité de Jensen*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe.

Démontrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{t=a}^{b} g(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. $\sqrt{1+f^2}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue positive. On pose $A = \int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_{t=0}^{1}\sqrt{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant 1+A$.

Exercice 11. *Calcul de limite*

Chercher $\lim_{x\to 0^+}\left(\displaystyle\int_{t=x}^{2x}\frac{\cos t\,\ln(1+t^2)}{\sin^2 t\,\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 12. *Calcul de limite*

Pour $0 < a < b$, déterminez $\lim_{x\to 0^+}\left(\displaystyle\int_{t=ax}^{bx}\frac{1-\cos u}{u^3}\,\mathrm{d}u\right)$.

Exercice 13. $\int f + \int f^{-1}$

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue, bijective, strictement croissante. Calculer $\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ (faire un dessin, et commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 14. *Sommes de Riemann*

1) Trouver $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

2) Trouver $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\ldots+\sqrt{(n-1)1})$.

3) Trouver $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$.

4) Trouver $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.

5) Donner un équivalent pour $n\to\infty$ de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

6) Soit $A_1\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.
Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k\right)$.

Exercice 15. *Calcul de limite*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(\frac{i}{n})f(\frac{j}{n})\right)$.

Exercice 16. *Moyenne géométrique*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $(1+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n}))(1+\frac{1}{n}f(\frac{2}{n}))\ldots(1+\frac{1}{n}f(\frac{n}{n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t)$.

On pourra utiliser : $\forall\, x \geqslant -\frac{1}{2},\ x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 17.

1) Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2) Trouver $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Exercice 18. *Maximum-minimum*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \min(x, b_n)\,\mathrm{d}x,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} \max(x, a_n)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 19. *Intégrale de* $\ln|x - e^{it}|$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$, on pose $I = \int_{t=0}^{2\pi} \ln|x - e^{it}|\,\mathrm{d}t$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer I.

Exercice 20. *Intégrale de* $|f|$
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{t=a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$ où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t=a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21. *Usage de symétrie*
Soit $I = \int_{t=0}^{\pi} \dfrac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 22. *Usage de symétrie*
Calculer $I = \int_{t=0}^{\pi} \dfrac{t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23. *Usage de symétrie*
Calculer $\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$. On remarquera que $\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - t)$.

Exercice 24. *DSF de* $1/(2-\cos x)$
On note $I_n = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos nx}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos nx}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos nx}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ et $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 25. *Calcul d'intégrale*
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{x=0}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2(nx)}$.

Exercice 26. arcsin *et* arccos
Simplifier $\int_{t=0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 27. *Approximation des rectangles pour une fonction lipchitzienne*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, K-lipchitzienne.
Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \dfrac{K(b-a)^2}{2n}$.

Exercice 28. *Approximation des tangentes*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Soit $I_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1) Donner une interprétation géométrique de I_n.

2) Montrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - I_n\right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.

Exercice 29. *Approximation des trapèzes*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \int_{t=a}^{b} \dfrac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $I = \int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$, et I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Démontrer que $|I - I_n| \leqslant \dfrac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

Exercice 30. *Calcul de limite*

Étudiez la limite de la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n^2}{(n+k)^2}$.

Exercice 31. *Aire sous une corde*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M' = \|f'\|_\infty$.

1) En majorant f par une fonction affine par morceaux, démontrer que $\left|\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M'\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

2) Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 32. *Échange de décimales*

1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0,a_1a_2a_3\ldots) = 0,a_2a_1a_3\ldots$ (échange des deux $1^{\text{ères}}$ décimales) et $f(1) = 1$. Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ définie par $g(0,a_1a_2a_3a_4\ldots) = 0,a_2a_1a_4a_3\ldots$ (échange des décimales deux à deux) et $g(1) = 1$. Montrer que g est Riemann-intégrable et calculer $\int_{t=0}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ définie par $h(0,a_1a_2a_3\ldots) = 0,a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}\ldots$ et $h(1) = 1$ où $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une permutation donnée de $\mathbb{N}^*$. Montrer que h est Riemann-intégrable et calculer $\int_{t=0}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33. $\int f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Quel est le signe de $I = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$?

Exercice 34. *Convexité*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $g(x) = \int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est convexe.

Exercice 35. *Primitive seconde*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \int_{t=a}^{x} x(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=x}^{b} t(1-x)f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier $g'' = f$.

Exercice 36. *Expression d'une primitive n-ème de f*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \int_{t=a}^{x} \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g^{(n)} = f$.

Exercice 37. *Thm de division*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+p}$ telle que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. On pose $g(x) = f(x)/x^n$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f^{(n)}(0)/n!$.

1) Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale.

2) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^p$ et $|g^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)| \text{ tq } 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Exercice 38. *Fonction absolument monotone*

Soit $f : [0,a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que f et toutes ses dérivées sont positives sur $[0,a[$.

1) Montrer que la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}\left(f(x) - f(0) - \ldots - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right)$ est croissante.

2) On fixe $r \in]0,a[$. Montrer que la série de Taylor de f converge vers f sur $[0,r[$.

Exercice 39. *Deuxième formule de la moyenne*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive décroissante.

On note $G(x) = \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$, $M = \sup\{G(x),\ x \in [a,b]\}$ et $m = \inf\{G(x),\ x \in [a,b]\}$.

1) On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que $mf(a) \leqslant \int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a)$.

2) Démontrer la même inégalité si f est seulement continue, en admettant qu'elle est limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ décroissantes.

3) Démontrer enfin qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_{t=a}^{c} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 40. *Inégalité de la moyenne*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f décroissante, et $0 \leqslant g \leqslant 1$. On note $G(x) = a + \int_{t=a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que $\int_{t=a}^{b} fg(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t=a}^{G(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 41. *Une inégalité*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$ et $\forall\, t \in [a,b]$, $0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$. Comparer $\int_{t=a}^{b} f^3(t)\,\mathrm{d}t$ et $\left(\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$. On introduira les fonctions : $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(x) = \int_{t=a}^{x} f^3(t)\,\mathrm{d}t$, et $H = F^2 - G$.

Exercice 42. *Intégrales de Wallis*

On note $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1) Comparer I_n et $\int_{t=0}^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

2) Démontrer que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.

4) Démontrer que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

5) Démontrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de $\binom{2n}{n}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 43. *Norme L^∞*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue non identiquement nulle. On pose $I_n = \int_{t=a}^{b} f^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $u_n = \sqrt[n]{I_n}$.

Soit $M = \max\{f(x)$ tq $a \leqslant x \leqslant b\}$ et $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.

1) Comparer M et u_n.

2) En utilisant la continuité de f en c, démontrer que : $\forall\, \varepsilon \in]0, M[$ il existe $\delta > 0$ tel que $I_n \geqslant \delta(M-\varepsilon)^n$.

3) En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 44. *Lemme de Lebesgue*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ...

1) si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) si f est en escalier.

3) si f est continue.

Exercice 45. *Plus grande fonction convexe minorant f*

1) Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.

On suppose que : $\forall\, x \in I$, $f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.

2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ (commencer par le cas où f est en escalier).

Exercice 46. *Centrale PC 1998*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continue.

1) Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que :

$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_{t=x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Étudier $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right)$.

Exercice 47. *Mines MP 2000*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π périodique, ne s'annulant pas. Montrer que $I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f'/f$ est un entier.

Exercice 48. *Fonctions affines*

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, et $F = \{f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ tq $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $g \in F$ vérifiant $g'' = f$ si et seulement si $\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{x=a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x$ sont nuls.

2) Soit $f \in E$ telle que $\int_{x=a}^{b} f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction $g \in F$. Montrer que f est affine.

Exercice 49. *Mines MP 2001*

Soit $a < 0 < b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\int_0^1 f = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

Exercice 50. *Mines MP 2000*

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

Exercice 51.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 52. *Centrale 2014*

1) Rappeler l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass polynomial.

2) Soit $P_n(x) = x^{n+1}(1-x)^2$ et f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall\, n \geqslant 1$, $\int_0^1 fP_n'' = 0$.

a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour $g(x) = f(x) - ax - b$ on ait $\int_0^1 g = \int_0^1 xg = 0$.

b) Montrer que que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n g = 0$ et conclure.

3) Montrer que si f vérifie $\int_0^1 fg'' = 0$ pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ nulle avec g' et g'' en 0 et en 1 alors f est affine.

4) Montrer que si f vérifie $\int_0^1 fg'' = 0$ pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ nulle aux voisinages de 0 et de 1 alors f est affine.

solutions

Exercice 1.

1) $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)$

2) $-\frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) - \frac{x}{3(x^3-1)}$

3) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6}\ln\Big[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big] - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\big[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\big]$

4) $-\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$

5) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\Big] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\big[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\big]$

6) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\Big] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\big[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\big]$

7) $\frac{\arctan x^2}{4} + \frac{x^2}{4(x^4+1)}$

8) $\frac{7}{10}\ln|x-2| + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\arctan(x+1)$

9) $\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{11}{4}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|$

10) $\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\Big[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1) - \sin k\alpha\arctan\big(\frac{x-\cos k\alpha}{\sin k\alpha}\big)\Big] + \frac{1}{20}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$

11) $\frac{1}{(b-a)^n}\ln\Big|\frac{x-b}{x-a}\Big| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

Exercice 2.

1) $-\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\Big|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\Big| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\Big|$

2) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x|$

3) $\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$

4) $\frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) - \frac{2}{3}\ln|1+2\cos x|$

5) $\sqrt{2}\,\mathrm{argth}(\sqrt{2}\sin x) - \mathrm{argth}(\sin x)$

6) $-2\sqrt{\frac{1-\sin x}{\sin x}} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{2\sin x}}$ (poser $u = 1/\sin x$)

7) $-\arctan\Big(\frac{\sqrt{\cos^2 x - a^2\sin^2 x}}{a}\Big)$

Exercice 3.

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right|$

2) $-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{3}{2}\arcsin(x-3/2)$

3) $\dfrac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

4) $\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\arcsin\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$ (poser $x=1+2\cos\varphi$)

5) $(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4}\,)+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$

6) $\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)^2}{4}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

7) $\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\dfrac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$ $(n\neq 1)$

8) $\dfrac{1}{6}\ln\left[\dfrac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}$, $u=\sqrt[3]{1+1/x^3}$ poser $v=1/x^3)$

Exercice 4.

1) $\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{k+1}\right)$

2) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x$

3) $\dfrac{1}{2}\big((2x+(a-1)\arctan x)\arctan x-\ln(1+x^2)\big)$

4) $xe^{1/x}$

5) $x\tan x+\ln|\cos x|$

6) $2\arctan\sqrt{e^x-1}$

7) $(x+2)\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}-\ln\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\big)$

8) $x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}$

9) $\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arcsin x}$

10) $\dfrac{e^{-x}}{50}((3-5x)\cos 2x+(4+10x)\sin 2x-25(x+1))$

11) $(\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{39}{125})e^{2x}\cos x+(\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{25}+\frac{27}{125})e^{2x}\sin x$

Exercice 5.

1) $\dfrac{3\pi}{16}$

2) $\dfrac{4}{15}$

3) $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$

4) 0

5) $\dfrac{\pi}{4}$

6) 1

7) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$

8) $\dfrac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$

9) $-\dfrac{1}{4}$

10) $\dfrac{\pi}{2} - 1$

11) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$

12) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}$

13) $2 - \dfrac{\pi}{2}$

14) $2 + 2\ln 2$

15) $4\sqrt{2} - 2\sqrt{e+1} + 4\ln\left[\dfrac{\sqrt{e+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right] - 2$

16) $a\ln\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right| - \ln(1-a^2)$

17) $\dfrac{\pi}{6}(3 - \dfrac{4}{\sqrt{3}})$

18) $\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

19) $\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$

Exercice 8.

3) $\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 12.

DL de $1-\cos u \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Exercice 14.

1) $\ln k$.

2) $\frac{\pi}{8}$.

3) $\frac{4}{e}$.

4) $\frac{1}{3}\int_{t=0}^{3\pi}\dfrac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \int_{t=0}^{\pi}\dfrac{\mathrm{d}t}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

5) $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.

6) $\frac{4}{\pi}$.

Exercice 17.

2) $\exp(\frac{\pi}{4})$.

Exercice 18.

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } b_n < -1 \\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant b_n \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } b_n > 1, \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n < -1 \\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1 \leqslant a_n \leqslant 1 \\ a_n & \text{si } a_n > 1. \end{cases}$$

Donc $a_{n+1} = f(a_{n-1})$, $b_{n+1} = g(b_{n-1})$. Point fixe : $a_n \to \sqrt{8} - 3$, $b_n \to 3 - \sqrt{8}$.

Exercice 21.
$\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 22.
$u = \pi - t \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_{t=0}^{\pi} \dfrac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \pi$.

Exercice 24.
$I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 25.
Couper en intervalles de longueur π/n. On obtient $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 26.
f est paire, π-périodique. $f'(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = f(\pi/4) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 30.
Comparaison entre $\int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ et son approximation des trapèzes. Découper et intégrer deux fois par parties, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{8}$.

Exercice 33.
$I = \Big[f'(t)(1+\cos t)\Big]_0^{2\pi} + \int_{t=0}^{2\pi} f''(t)(1+\cos t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Exercice 38.
1) formule de Taylor-intégrale.

Exercice 41.
$H' = f(2F - f^2) = fK$ et $K' = 2f(1-f')$ donc H est croissante et positive.

Exercice 46.
2) Soit $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G = F^{-1}$.
Alors $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ G(\frac{k}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{t=a}^{b} f^2(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_{t=a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 47.
On a $f = e^g$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$ par le thm. de relèvement d'où $I(f) = \dfrac{g(2\pi)-g(0)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 48.
1) Il existe toujours une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g'' = f$, $g(a) = g'(a) = 0$: $g(x) = \int_{t=a}^{x} (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ (Taylor-Intégral).
2) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f_1 : x \mapsto f(x) - \lambda - \mu x$ vérifie $\int_{x=a}^{b} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} x f_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On trouve

$$(b-a)\lambda + \frac{b^2-a^2}{2}\mu = -\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{b^2-a^2}{2}\lambda + \frac{b^3-a^3}{3}\mu = -\int_{x=a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

et ce système a pour déterminant $(b-a)^4/12 \neq 0$ donc λ, μ existent et sont uniques. Soit $g_1 \in F$ telle que $g_1'' = f_1$: $\int_{x=a}^{b} g_1''(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $g \in F$, en particulier pour $g = g_1$ donc $g_1'' = f_1 = 0$ et $f(x) = \lambda + \mu x$.

Exercice 49.
Soit $g = f - a$. On a $0 \leqslant g \leqslant b - a$ et $\int_0^1 g = -a$ d'où $\int_0^1 g^2 \leqslant (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ et $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leqslant -ab$.

Exercice 50.
Si l'on pose $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, on constate que $a(x) = F^{-1}(1 + F(x))$ ce qui prouve l'existence, l'unicité et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de a. Pour la symétrie, il faut montrer que $a(-a(x)) = -x$ soit $\int_{t=-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ ce qui est immédiat.

Exercice 51.

On pose $F(x)=\int_{t=0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = x^2f(0)/2+o(x^2)$.

En intégrant par parties, il vient $0=\int_0^1 f = F(1)+\int_{t=0}^{1} F(t)\,\mathrm{d}t/t^2$, ce qui empêche F d'être de signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 52.

2) a) On a un système linéaire en (a,b) de matrice $\begin{pmatrix} \frac12 & 1 \\ \frac13 & \frac12 \end{pmatrix}$ inversible.

b) La famille $(1,X,P_1'',P_2'',\dots)$ est de degrés étagés ; c'est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc il suffit de prouver que $\int_0^1 gP_n''=0$ ce qui résulte de la même propriété pour f en se débarrassant de a,b par parties.

Donc par linéarité, $\int_0^1 Pg=0$ pour tout polynôme P. En prenant une suite de polynômes convergeant uniformément vers g on obtient $\int_0^1 g^2=0$ soit $g=0$ et f est une fonction affine.

3) En prenant $Q_n(x)=x^{n+3}(1-x)^3$ et a,b,c,d tels que pour $h(x)=f(x)-a-bx-cx^2-dx^3$ on ait $\int_0^1 h=\int_0^1 xh=\int_0^1 x^2h=\int_0^1 x^3h=0$, on trouve comme précédemment $h=0$ et donc $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. Avec Maple, $0=\int_0^1 fQ_0''=\frac{3}{140}d+\frac{1}{70}c$ et $0=\int_0^1 fQ_1''=\frac{1}{84}d+\frac{1}{140}c$, d'où $c=d=0$.

4) Le problème consiste à approcher une fonction g du type précédent par une fonction nulle aux voisinages de 0 et 1. On traite seulement le problème en 0 pour prouver à l'interrogateur qu'on a des idées.

Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$ et soit $\varphi:\mathbb{R}^+\to[0,1]$ de classe $\mathcal{C}^2$, nulle sur $[0,1]$ et constante égale à 1 sur $[2,+\infty[$. On pose $g_n(x)=g(x)\varphi(nx)$: fonction nulle sur $[0,1/n]$ et coïncidant avec g sur $[2/n,1]$. Il s'agit de prouver que $\|g''-g_n''\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc de majorer uniformément $|g''(x)-g_n''(x)|$ si $0\leqslant x\leqslant 2/n$.

On a $g_n''(x)=g''(x)\varphi(nx)+2ng'(x)\varphi'(nx)+n^2g(x)\varphi''(nx)$ avec $\varphi,\varphi',\varphi''$ bornées. Soit $\varepsilon>0$ et n suffisament grand pour que $0\leqslant x\leqslant 2/n \Rightarrow |g''(x)|\leqslant\varepsilon$ (continuité de g'' en 0). Par intégration on obtient $|g'(x)|\leqslant\varepsilon x\leqslant 2\varepsilon/n$ et $|g(x)|\leqslant\varepsilon x^2/2\leqslant 2\varepsilon/n^2$ d'où $|g''(x)-g_n''(x)|\leqslant \text{cste}\times\varepsilon$ pour $0\leqslant x\leqslant 2/n$ et aussi pour $x\geqslant 2/n$.