Intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 1. *Calcul de limite*
Chercher $\lim_{x\to 0} \int_{t=x}^{2x} \dfrac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. *Calcul de limite, Ensi P 90*
Calculer les limites : $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \dfrac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} \int_0^x \dfrac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt$.

Exercice 3. *Calcul de limite*
Chercher $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} \int_{t=3}^{x^2+x} \dfrac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3+\ln(\ln t)}$.

Exercice 4. *Calcul de limite*
Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=x}^{x^2} \dfrac{e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\sin t \ln t}$.

Exercice 5. *Série d'intégrales, Esem 91*
Établir la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

Exercice 6. $\sin(t)/(t+x)$

1) Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

Exercice 7. *Calcul de limite*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x\to 0^+} \int_{t=0}^{1} \dfrac{xf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. *Calcul d'équivalent, Mines 1999*
Donner un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9. *Calcul de limite*
Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ à l'ordre 3 de $f(x) = \int_{t=a/x}^{ax} \dfrac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. $(\int f^x)^{1/x}$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\int_{t=a}^{b} (f(t))^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$.

1) Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \max(f)$.

2) On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \exp\left(\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 11. $t^n f(t)$
Soit $I_n = \int_{t=0}^{1} t^n \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 12. $t^n f(t)$
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 13. $f(t^n)$

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_{t=0}^{1} f(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

2) Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=0}^{1} \dfrac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

3) Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $-1 + \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14. $f(t^n)$
Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

Exercice 15. $f(t^n)$
Donner les deux premiers termes du DL pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{t=0}^{1} \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16. $f(t^n)$
Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $\int_{t=1}^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17. *Calcul de limite*
Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\sin^n x}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 18. *Calcul de limite*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19. $(1-x/n)^n$, *Ensi PSI 1998*
Soit $x \in [0,n]$. Montrer que $(1-x/n)^n \leqslant e^{-x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1-x/n)^n\,\mathrm{d}x$.

Exercice 20. *Équation intégrale, Ensi P 91*
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 21. $\tan^n t$, *Ensi Physique P 94*
On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,\mathrm{d}t$.
1) Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) Calculer I_n en fonction de n.
3) Que peut-on en déduire ?

Exercice 22. *Calcul de limite, École de l'Air 94*
Chercher $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23. *Approximation de la mesure de Dirac*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue atteignant son maximum en un unique point $c \in]a,b[$.
1) Soit $\mu > 0$ tel que $[c-\mu, c+\mu] \subset [a,b]$. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^{b} f^n(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_{t=c-\mu}^{c+\mu} f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
2) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continue. Chercher $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t=a}^{b} f^n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_{t=a}^{b} f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 24. *Équation intégrale*
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 25. *Convolution*
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.
1) Montrer que φ est continue et que si g est de classe $\mathcal{C}^k$, alors φ l'est aussi.
2) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et g est continue), alors φ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 26. *Convolution (Mines MP 2003)*
Soient $f, g \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On pose $h(x) = \int_{t=0}^{x} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
1) Existence et continuité de h.
2) Peut-on inverser f et g ?
3) On suppose f intégrable sur $[0,+\infty[$ et g bornée. Montrer que h est bornée.
4) On prend $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \cos(\alpha x)$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. h est-elle bornée (on pourra étudier les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$) ?

Exercice 27. *Calcul d'intégrale*

1) Calculer $\varphi(a) = \int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+at}$.

2) En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{1} \dfrac{t\mathrm{d}t}{(1+at)^2}$.

Exercice 28. *Fonction définie par une intégrale*

On pose $\varphi(x) = \int_{t=0}^{1} e^{-x/t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Vérifier que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 29. *Fonction définie par une intégrale, Mines 1999*

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

Exercice 30. *Fonction définie par une intégrale*

On pose pour $x \geqslant 0$: $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 31. *Fonction définie par une intégrale*

On pose $I(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Exercice 32. *Intégrale de Gauss*

On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_{t=0}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_{t=0}^{1} \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.

2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3) En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 33. *Intégrale de Gauss, Ensi PC 1999*

On donne : $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existence et valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 34. *Fonction définie par une intégrale*

1) Soit $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Chercher une relation simple entre I et I'.

3) En déduire la valeur de $I(x)$ (on admet que $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 35. *Fonctions définies par des intégrales*

On pose, pour x réel, $F(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{1-\cos tx}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{1-\cos tx}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et que $F(x) = |x|F(1)$.

2) Montrer que la fonction $F - G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

Exercice 36. *Théorème de division des fonctions $\mathcal{C}^\infty$*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$.

Vérifier que $g(x) = \int_{t=0}^{1} f'(tx)\,\mathrm{d}t$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrer de même que la fonction $g_k : x \mapsto \dfrac{1}{x^k}\left(f(x) - f(0) - xf'(0) - \ldots - \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Exercice 37. $y'' + y = f$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle : $y'' + y = f(x)$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 38. *Fonction définie par une intégrale*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$: $g(x,y) = \dfrac{1}{x}\int_{t=x}^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que g peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) On suppose de plus f dérivable en 0. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 39. *Fonctions définies par des intégrales*

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} |x+t|\sin t\,\mathrm{d}t$.
2) $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
3) $f(x) = \int_{t=x}^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.
4) $f(x) = \int_{t=0}^{1} \dfrac{e^t\,\mathrm{d}t}{t+x}$.
5) $f(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} x\exp\Bigl(\dfrac{\sin t}{x}\Bigr)\mathrm{d}t$.
6) $f(x) = \int_{t=0}^{x} \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 40. *Fonction définie par une intégrale*

Montrer qu'il existe un unique réel $x \in [0,\pi]$ tel que $\int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\theta = 0$. Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} près.

Exercice 41. *Développement en série, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999*

Soit $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{\sin\alpha x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{b+n^2}$.
3) Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \to +\infty$.

Exercice 42. *Formule de Stirling*

Montrer que $\mathit{\Gamma}(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Exercice 43. *Développement en série, Mines 1999*

Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{e^{-i\theta} - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\exp(in\theta)}{n}$.

Exercice 44. *Fonction définie par une intégrale, X 1999*

1) Calculer $f(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(at)\,\mathrm{d}t$.
2) Soit $g(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\dfrac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$; calculer $\lim_{a\to+\infty} g(a)$.

Exercice 45. *Développement asymptotique*

Soient $J(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$ et $K(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \dfrac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}}$.

Calculer $\lim_{x\to 0^+}(J(x) - K(x))$ et montrer que $J(x) = -\ln x + 2\ln 2 + o_{x\to 0^+}(1)$.

Exercice 46. *Transformée de Laplace*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On pose $\varphi(a) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que φ est continue en 0.

Exercice 47.
On pose pour $n \geqslant 2$: $v_n = \int_{x=0}^{1} \dfrac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite (v_n) converge. Nature de la série $\sum(v_n - 1)$?

Exercice 48.
On pose pour $n \geqslant 2$, $u_n = \int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite (u_n) converge, puis que la série $\sum(u_n - 1)$ converge également.

Exercice 49. *Centrale MP 2000*
Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Exercice 50. *Centrale MP 2000*
On considère $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.
1) Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).
2) Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}(x)$.
3) Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en 1.
4) Calculer $f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Exercice 51. *Ensae MP* 2000*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\alpha)}{n+k}$.

Exercice 52. *Polytechnique MP* 2000*
Existence et continuité de $f(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est intégrable.

Exercice 53. *Centrale MP 2001*
1) Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$ en série de fractions rationnelles.
2) Montrer qu'en 0^+, $s(x)$ est équivalente à $\dfrac{\pi}{2x}$.

Exercice 54. *X MP* 2001*
Étudier $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 55. *Ensi MP 2004*
Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
1) Trouver le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3) Calculer $f - f'$.
4) Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x \to +\infty$.
5) Montrer que $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\Big(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\Big)$.
6) Tracer la courbe de f.

Exercice 56. *Ensea MP 2004*
Soit $\alpha > 0$.
1) Montrer que $f : x \mapsto e^{-\alpha x}\int_{\theta=0}^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\theta$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2) Calculer $I = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Indication : écrire $I = \lim_{a\to+\infty} \int_{x=0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 57. *X MP* 2000*
Étudier la limite en 0+ de $I(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-t}-\cos t}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 58. *ζ et Γ*
Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 59. *Centrale MP 2002*
Soit $f : x \mapsto \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^{x+1} + t + 1}$. Déterminer son domaine de définition ; étudier sa continuité et sa monotonie. Calculer $\int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^{x+1} + t}$ et en déduire des équivalents et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 60. *Polytechnique MP 2002*
Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Chercher un équivalent pour $n \to \infty$ de $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x)\exp(\lambda n \sin^2(x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 61. *Centrale MP 2004*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}\int_{t=0}^{1} t(t-1)\dots(t-n)\,\mathrm{d}t$.

1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2) Donner un équivalent de a_n.

Exercice 62. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$, *Mines-Ponts MP 2004*
Soit $u_n(t)$ le terme général d'une série : $u_n(t) = t^{n-1}\sin(nx)$ avec $0 < x < \pi$.
1) Étudier la convergence de la série.
2) Calculer $\sum_{p=0}^{n} u_p(t) = S_n(t)$. Mettre $S_n(t)$ sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3) Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n(t)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{1} S_n(t)\,\mathrm{d}t$.
4) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Exercice 63. *Lemme de Lebesgue, Centrale MP 2004*
Soit f continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) On suppose que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit $u_n = \int_{t=0}^{n\pi} \sin^2(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \to \infty$ et la préciser.

Exercice 64. *Suite d'intégrales, Centrale MP 2004*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \left(\dfrac{x + x^n}{2}\right)^n$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ.
2) a) La convergence est-elle uniforme ?
b) La convergence est-elle monotone ?
3) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $J_n \sim \dfrac{2}{n^2}$.

Exercice 65. *Mines-Ponts MP 2004*
Soit $f(x) = \int_{t=0}^{1} \dfrac{1-t}{\ln t} t^x\,\mathrm{d}t$. Étudier le domaine de définition de f, sa dérivabilité, puis calculer $f(x)$.

Exercice 66. *Mines-Ponts MP 2004*
Soit $I(a) = \int_{x=0}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$.

1) Quel est le domaine de définition de I ?
2) Étudier la continuité et la dérivabilité de I.
3) Calculer $I(a)$.

Exercice 67. *ENS Lyon MP* 2004*

1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $F(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t$ avec $a < 0 < b$. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Montrer que $F(x) = \dfrac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + o(1/x)$.

3) Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,\mathrm{d}t$.

4) Soit $g(x) = \int_{t=a}^{b} f(t)e^{-ixt^2/2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g(x) = \dfrac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$.

Exercice 68. *Thm de d'Alembert-Gauss*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans $\mathbb{C}$. On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r,\theta) = \dfrac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

2) Vérifier que $ir\partial f/\partial r = \partial f/\partial\theta$. En déduire que F est constante.

3) Obtenir une contradiction.

Exercice 69. *Étude d'intégrales, Mines-Ponts 2015*

Soient $f(x) = \int_{t=0}^{x} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_{t=0}^{x} \dfrac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner $f'(0)$ et $g'(0)$.

2) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite ℓ finie. On admettra dans la suite que $\ell = \pi/2$.

3) Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

4) Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que pour tout n, $f(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer la monotonie de (a_n) et trouver un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

5) Montrer qu'il existe une suite (b_n) de réels positifs telle que $b_0 = 0$ et $\int_{t=b_n}^{b_{n+1}} \dfrac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 70. *Transformée de Laplace, ENS 2014*

Soit φ continue par morceaux bornée sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, et F définie par $F(\lambda) = \int_{x=0}^{+\infty} \varphi(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$. On suppose que φ change n fois de signe. Montrer que F change au plus n fois de signe.

Exercice 71. *Mines MP 2012*

Déterminer la limite pour $n \to \infty$ de $\int_{x=0}^{+\infty} x^{-1/n}(1 + x/n)^{-n}\,\mathrm{d}x$.

solutions

Exercice 1.
$= \int_{t=x}^{2x} \Big(\frac{1}{t} - \frac{5t}{6} + o(t)\Big) \mathrm{d}t \to \ln 2.$

Exercice 2.
$\frac{t}{\tan^2 t} = \frac{1}{t} + \varphi(t)$ avec φ prolongeable par continuité en 0, donc $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,dt = \ln 3$.
$\frac{t^2}{t+e^{3t}} = t^2 + o(t^2)$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt = \frac{1}{3}$.

Exercice 3.
Formule de la moyenne sur $[3, x]$ et $[x, x+x^2] \Rightarrow \lim = 0$.

Exercice 4.
$\ln 2$.

Exercice 5.
$\sum_{n=1}^{n} (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \Big(1 - \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n}\Big) \frac{\mathrm{d}t}{2+t^3} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^3} = \frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}.$

Exercice 6.
2) $I(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exercice 7.
$\frac{\pi}{2} f(0)$.

Exercice 8.
$t = ux$ puis intégration par parties $\Rightarrow \sim \frac{1}{x^2}$.

Exercice 9.
$f'(x) = \frac{2\ln x}{a(1+x^2)} \Rightarrow f(1+h) = \frac{1}{2a}(h^2 - h^3) + o(h^3)$.

Exercice 10.
2) Soit $\varepsilon > 0$: Pour x assez petit, $\big|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\big| \leqslant \varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a, b]$.
Donc $\Big|\int_{t=a}^{b} f(t)^x \mathrm{d}t - 1 - x\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \varepsilon x$, et $\Big|\ln\Big(\int_{t=a}^{b} f(t)^x \mathrm{d}t\Big) - x\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant 2\varepsilon x$.

Exercice 13.
1) TCD
2) $= \Big[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\Big]_{t=0}^{1} - \frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\ln 2}{n}$.
3) $\frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+1} = \frac{2\sqrt{2} - 2 + 2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}$.

Exercice 14.
$1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 15.
$1 + \frac{1}{n}\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+1} + o(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{2\sqrt{2} - 2 + 2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 16.
$u = t^n \Rightarrow \sim \frac{1}{n}\int_{u=1}^{e} \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 18.
$f(0)$.

Exercice 19.
Soit $f_n(x) = (1 - x/n)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{simpl}} e^{-x}$ et il y a convergence dominée.

Exercice 20.
$f(x) = \cos x$.

Exercice 21.
1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
2) $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$,
$I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln\sqrt{2}$.
3) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$.

Exercice 22.
$\int_0^1 \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercice 23.
1) 1.
2) $g(c)$.

Exercice 24.
$\Phi(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \Phi'\Phi^2 \to \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\ell/(3x)}$.

Exercice 26.
4) Pour $\alpha = 0$ on a $h(x) = \int_{t=0}^{x} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, quantité bornée car l'intégrale converge en $+\infty$.

Pour $\alpha = 1$ on a $h(x) = \cos x \int_{t=0}^{x} \dfrac{\cos t \sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \sin x \int_{t=0}^{x} \dfrac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$, quantité non bornée car la deuxième intégrale diverge en $+\infty$.
Pour $0 < \alpha < 1$, développer le $\cos(x - t)$ puis linéariser les produits obtenus. On obtient quatre intégrales convergentes, donc h est bornée.

Exercice 27.
1) $\dfrac{\ln(1+a)}{a}$.
2) $= -\varphi'(a) = \dfrac{\ln(1+a)}{a^2} - \dfrac{1}{a(1+a)}$.

Exercice 30.
$f'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$, $f(x) = \pi \ln(x+1)$.

Exercice 31.
2) $I'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$, $I(x) = \pi \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

Exercice 32.
1) $g'(x) = \int_{t=0}^{1} (-2x) e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2e^{-x^2}\sqrt{f(x)} = -f'(x)$.

Exercice 33.
$u = \dfrac{a}{t} \Rightarrow I = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} \Rightarrow I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

Exercice 34.
2) $I'(x) = -2xI(x)$.
3) $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$.

Exercice 38.

1) $g(x,y) = \int_{u=1}^{y} f(ux)\,\mathrm{d}u$.

2) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{x}\Big(yf(xy) - f(x) - \int_{u=1}^{y} f(ux)\,\mathrm{d}u\Big) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{y^2-1}{2} f'(0)$.

Exercice 39.

1) -2 de $-\infty$ à $-\frac{\pi}{2}$, $\quad 2\sin x$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, $\quad 2$ de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

Exercice 40.

$2.40 < x < 2.41$.

Exercice 41.

2) $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.

3) comparaison série-intégrale $\Rightarrow I(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 42.

$\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

Exercice 44.

1) $f'(a) = -\dfrac{a}{2} f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/4)$.

2) $g'(a) = f(a) \Rightarrow g(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 46.

1) Leibniz.

2) Soit $F(x) = \int_{t=x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. On a $\varphi(a) = F(0) - a\int_{t=0}^{+\infty} e^{-at}F(t)\,\mathrm{d}t = F(0) - \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}F(u/a)\,\mathrm{d}u$.
Comme F est continue et $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la dernière intégrale tend vers zéro quand $a \to 0^+$ par convergence dominée.

Exercice 47.

$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ par convergence dominée. $v_n - 1 = \int_{x=0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\int_{u=0}^{1} \dfrac{u^{-1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u \sim \dfrac{\ln 2}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 48.

$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ par convergence dominée.

$u_n - 1 = \int_{x=0}^{1}\Big(\dfrac{1+x^{n-2}}{1+x^n} - 1\Big)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\int_{u=0}^{1} \dfrac{u^{1-1/n}}{1+u}(u^{-2/n}-1)\,\mathrm{d}u$.

On a $0 \leqslant u^{-2/n} - 1 = \exp\Big(-\dfrac{2\ln(u)}{n}\Big) - 1 \leqslant -\dfrac{2\ln(u)}{n}\exp\Big(-\dfrac{2\ln(u)}{n}\Big)$

d'où $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n^2}\int_{u=0}^{1} \dfrac{u^{1-3/n}(-\ln u)}{1+u}\,\mathrm{d}u = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Exercice 49.

$I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 1$.

$I(2) = (x = e^u) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \dfrac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2}\,\mathrm{d}u = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \dfrac{u}{(e^u+e^{-u})^2}\,\mathrm{d}u = 0$ (parité).

$$I(3) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3}\,\mathrm{d}u = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{-u(e^u-e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^3}\,\mathrm{d}u = \Big[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})^2}\Big]_{u=0}^{+\infty} - \int_{u=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2(e^u+e^{-u})^2}$$
$$= -\int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{2u}\,\mathrm{d}u}{2(1+e^{2u})^2} = \Big[\frac{1}{4(1+e^{2u})}\Big]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}.$$

$I(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par convergence dominée.

Exercice 50.

1) $D_f =]0,1[$. f est convexe sur $]0,1[$ par intégration de l'inégalité de convexité pour $x \mapsto t^{-x}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0,1]{} +\infty$ par convergence monotone donc f décroît puis recroît.

3) En 0 : $\dfrac{1}{t^x(1+t)} = \dfrac{1}{t^{x+1}} - \dfrac{1}{t^{x+1}(1+t)}$ donc $f(x) = \int_{t=0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \dfrac{1}{x} - \int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}(1+t)} \sim \dfrac{1}{x}$.

En 1 : $\dfrac{1}{t^x(1+t)} = \dfrac{1}{t^x} - \dfrac{t^{1-x}}{1+t}$ donc $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \int_{t=0}^{1} \dfrac{t^{1-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \sim \dfrac{1}{1-x}$.

4) $f(1/n) = (t = u^n) = \int_{u=0}^{+\infty} \dfrac{nu^{n-1}\,\mathrm{d}u}{u(1+u^n)} = (v = 1/u) = \int_{v=0}^{+\infty} \dfrac{n\,\mathrm{d}v}{1+v^n} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/n)}$ (formule bien connue…)

Exercice 51.

Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $u_n = 0$ pour tout n. Sinon,
$u_n = \Im\Big(\int_{t=0}^{1} \sum_{k=1}^{n} t^{n+k-1} e^{ik\alpha}\,\mathrm{d}t\Big) = \Im\Big(\int_{t=0}^{1} \dfrac{t^n e^{i\alpha} - t^{2n} e^{i(n+1)\alpha}}{1 - te^{i\alpha}}\,\mathrm{d}t\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par convergence dominée.

Exercice 52.

$I_a = \int_{x=-a}^{a} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x=-a}^{a} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-a}^{a} \dfrac{e^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

On a $\int_{x=-a}^{a} e^{-|x+t|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2 - 2e^{-a}\operatorname{ch} t & \text{si } |t| < a \\ 2e^{-|t|}\operatorname{sh} a & \text{si } |t| \geqslant a, \end{cases}$

donc $I_a \leqslant \int_{t=0}^{a} \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_{t=a}^{+\infty} \dfrac{4e^{-t}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}}\,\mathrm{d}t = 4\arctan(\sqrt{a}) + \dfrac{4e^{-a}\operatorname{sh} a}{(1+a)\sqrt{a}} \leqslant$ cste.

Exercice 53.

1) $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,\mathrm{d}t$.

On a $|\sin(t)e^{-kxt}| \leqslant te^{-kxt}$ et $\int_{t=0}^{+\infty} te^{-kxt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{k^2}$ donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t)e^{-kxt}|\,\mathrm{d}t$ converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2x^2+1}$.

2) Sachant (?) que $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \Big(\frac{x\sin t}{e^{xt}-1} - \frac{\sin t}{t}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\Big)\sin\Big(\frac{u}{x}\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= -x\Big[\underbrace{\Big(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\Big)}_{\xrightarrow[u\to 0^+]{} -\frac{1}{2}}\cos\Big(\frac{u}{x}\Big)\Big]_{u=0}^{+\infty} + x\int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\Big(\frac{-e^u}{(e^u-1)^2} + \frac{1}{u^2}\Big)}_{\xrightarrow[u\to 0^+]{} \frac{1}{12}}\cos\Big(\frac{u}{x}\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= x(\text{quantité bornée}) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.
\end{aligned}$$

Exercice 54.

Fonction de x de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, décroissante de limite $\pi/2$ en 0^+ et 0 en $+\infty$. Demi-tangente verticale en 0^+, Équivalente à $1/x$ en $+\infty$ (par IPP). Équation différentielle : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Exercice 55.

1) $[0,+\infty[$.

3) $f(x) - f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2x}\,\mathrm{d}t = (u = t\sqrt{x}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

4) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \dfrac{u^2e^{-u^2}}{x+u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} \dfrac{u^2e^{-u^2}}{1+u^2/x}\,\mathrm{d}u \sim \dfrac{-1}{x\sqrt{x}} \int_{u=0}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

Exercice 56.

2) Thm de Fubini : $\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{x=0}^{+\infty} \mathbb{R}e(e^{(-\alpha+i\sin\theta)x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \dfrac{\alpha\,\mathrm{d}\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (couper en $\theta=\pi/2$ et poser $u=\tan\theta$).

Exercice 57.

$I'(x) = \int_{t=0}^{+\infty}(\cos t - e^{-t})e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{1}{x+1}$ donc $I(x) = \ln\Big(\dfrac{1+x^2}{(1+x)^2}\Big) + \text{cste}$ et $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où cste $=0$. Alors $I(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 59.

$D_f =]0,+\infty[$. Il y a domination locale, donc f est continue.

De même, pour $x>0$ on a $f'(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1}+t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u=1/t$ dans l'intégrale sur $[1,+\infty[$ il vient :

$f'(x) = \int_{t=0}^{1}\ln(t)t^{x+1}\Big(\dfrac{1}{(t+t^{x+1}+t^{x+2})^2} - \dfrac{1}{(t^{x+1}+t+1)^2}\Big)\,\mathrm{d}t < 0$ car $\ln(t)<0$ et $t^{x+2}<1$ si $t\in]0,1[$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

$\int_{t=1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}+t} = \int_{t=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}}\,\mathrm{d}t =$ (domination du reste avec le CSA) $= \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k+1)x} = \dfrac{\ln 2}{x}$.

$\Big|f(x) - \int_{t=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^{x+1}+t}\Big| = \int_{t=0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}+t+1} + \int_{t=1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{(t^{x+1}+t)(t^{x+1}+t+1)} \leqslant \int_{t=0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t+1} + \int_{t=1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = 2\ln 2$ donc $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x} + O_{x\to0^+}(1)$.

Pour $x\to+\infty$, on a avec le TCM séparément sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t=0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln 2$.

Exercice 60.

Pour $\lambda\neq0$: $I_n = \Big[\dfrac{\exp(\lambda n\sin^2(x))}{2\lambda n\cos(x)}\Big]_{x=0}^{\alpha} - \int_{x=0}^{\alpha}\dfrac{\sin(x)}{2\lambda n\cos^2(x)}\exp(\lambda n\sin^2(x))\,\mathrm{d}x = \dfrac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)} - \dfrac{1}{2\lambda n} - \dfrac{J_n}{2\lambda n}$ avec $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Donc $I_n \sim \dfrac{\exp(\lambda n\sin^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}$ si $\lambda>0$ et $I_n\sim-\dfrac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda<0$.

Exercice 61.

1) Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a $t(1-t)(n-1)! \leqslant t(1-t)\dots(n-t) \leqslant n!$ d'où $\dfrac{1}{6n} \leqslant |a_n| \leqslant 1$ et $R = 1$.

2) $(-1)^n a_n = \int_{t=0}^1 t(1-t)(1-t/2)\dots(1-t/n)\,\mathrm{d}t$. Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac12$ on a $x \leqslant -\ln(1-x) \leqslant x + x^2$ (étude de fonction) donc pour $k \geqslant 2$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$: $e^{-t/k-t^2/k^2} \leqslant 1 - t/k \leqslant e^{-t/k}$ d'où :

$$b_n = \int_{t=0}^1 t(1-t)e^{-t(H_n-1)-t^2K_n}\,\mathrm{d}t \leqslant (-1)^n a_n \leqslant \int_{t=0}^1 te^{-tH_n}\,\mathrm{d}t = c_n$$

avec $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ et $K_n = 1/2^2 + \dots + 1/n^2$.
Équivalent du majorant :

$$c_n = \frac{1-(1+H_n)e^{-H_n}}{H_n^2} \sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Équivalent du minorant :

$$\begin{aligned} b_n &\geqslant \int_{t=0}^1 t(1-t)(1-t^2K_n)e^{-t(H_n-1)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^1 te^{-t(H_n-1)}\,\mathrm{d}t - \int_{t=0}^1 t^2(1+t(1-t)K_n)e^{-t(H_n-1)}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_{t=0}^1 te^{-t(H_n-1)}\,\mathrm{d}t - (1+\tfrac14 K_n)\int_{t=0}^1 t^2e^{-t(H_n-1)}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1-H_ne^{1-H_n}}{(H_n-1)^2} - (1+\tfrac14K_n)\frac{2-(H_n^2+1)e^{1-H_n}}{(H_n-1)^3} \\ &\sim \frac{1}{H_n^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{H_n^2} \sim \dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Exercice 62.

1) $\sum u_n(t)$ converge pour $|t| < 1$.

2) $P_n(t) = t^{n+1}\sin(nx) - t^n\sin((n+1)x) + \sin(x)$, $Q(t) = t^2 - 2t\cos(x) + 1 = (t-\cos x)^2 + \sin^2 x \geqslant \sin^2 x$.

3) Pour $|t| < 1$ on a $S_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin t}{Q(t)}$ et il y a convergence dominée vu la minoration de Q donc l'intégrale suit : $\int_{t=0}^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t=0}^1 \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}t}{t^2-2t\cos x+1} = (t - \cos x = u\sin x) = \int_{u=-\cot x}^{\tan(x/2)} \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \dfrac{\pi - x}{2}$.

4) $\dfrac{\sin(nx)}{n} = \int_{t=0}^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$ d'où $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\sin(nx)}{n} = \dfrac{\pi-x}{2}$.

Exercice 63.

2) $\sin^2(nt) = \dfrac{1-\cos(2nt)}{2}$, donc il suffit d'étudier $I_n = \int_{t=0}^{n\pi}\cos(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons $I_{n,p} = \int_{t=0}^{\min(n,p)\pi}\cos(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$: on a $|I_n - I_{n,p}| \leqslant \int_{t=p\pi}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$, quantité indépendante de n et tendant vers 0 quand $p \to \infty$ donc le théorème d'interversion des limites s'applique : $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} I_{n,p} = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_{n,p} = 0$. On en déduit $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac12\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 64.

1) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ et $f_n(1) = 1$ donc $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

2) **a)** Non, la continuité n'est pas conservée.
b) Oui, il y a décroissance évidente.

3) Changement de variable $u = \left(\dfrac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \dfrac{2}{n(n-1)}\int_{u=1/2^n}^1 (2u^{1/n}-1)^{2/(n-1)}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$ et l'intégrale tend vers 1 quand $n \to \infty$ par convergence dominée.

Exercice 65.

Il y a convergence si et seulement si $x > -1$.

$f'(x) = \int_{t=0}^{1} (1-t)t^x \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$, donc $f(x) = \ln\Big(\dfrac{x+1}{x+2}\Big) + C$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $C = 0$.

Exercice 66.

1) $]1, +\infty[$.

3) $I'(a) = -\int_{x=0}^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-ax} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1}\Big)$. D'où $I(a) = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{a-1}{a+1}\Big) +$ cste et $I(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la constante est nulle.

Exercice 67.

1) Intégrer par parties.

2) Intégrer deux fois par parties.

3) Pour $0 < u < v$: $\int_{t=u}^{v} e^{-it^2/2} \,\mathrm{d}t = \Big[\dfrac{e^{-it^2/2}}{-it}\Big]_{t=u}^{v} - \int_{t=u}^{v} \dfrac{e^{-it^2/2}}{it^2} \,\mathrm{d}t \underset{v\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{e^{-iu^2/2}}{iu} - \int_{t=u}^{+\infty} \dfrac{e^{-it^2/2}}{it^2} \,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\int_{t=u}^{+\infty} e^{-it^2/2} \,\mathrm{d}t$ converge et de même pour $\int_{t=-\infty}^{-u} e^{-it^2/2} \,\mathrm{d}t$.

4) On pose $f(t) = f(0) + t\varphi(t)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$. Il vient :

$$g(x)\sqrt{x} = f(0)\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2} \,\mathrm{d}u - \frac{1}{i\sqrt{x}}\Big[e^{-iu^2/2}\varphi(u/\sqrt{x})\Big]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} + \frac{1}{ix}\int_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\varphi'(u/\sqrt{x}) \,\mathrm{d}u$$

$$\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).I$$

Exercice 69.

1) Les intégrales sont convergentes par limite finie en un point fini. On a $f'(0) = \frac{1}{2}$, $g'(0) = 0$.

2) $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \max(\frac{1}{2}, \frac{2}{t^2})$ donc $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge.

3) $\int_{t=2k\pi}^{(2(k+1)\pi} \dfrac{1-\cos t}{t} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_{t=2k\pi}^{(2(k+1)\pi} \dfrac{1-\cos t}{2(k+1)\pi} \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{k+1}$. La série étant divergente, $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$ diverge.

4) f définit une bijection continue strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\ell, \ell[$. La fonction réciproque est elle aussi strictement croissante continue. Ainsi a_n existe est unique et la suite (a_n) est strictement décroissante de limite nulle.

5) $b_n = g^{-1}(1 + \ldots + 1/n)$.

Exercice 70.

L'intégrale définissant F converge absolument car φ est bornée. On remarque qu'il suffirait en fait que φ soit dominée par une fonction polynomiale et on prendra cela comme hypothèse dans la récurrence ci-dessous. Si φ est de signe constant, F a ce même signe constant. Si φ change de signe en $a \in]0, +\infty[$ alors $F'(\lambda) + aF(\lambda) = \int_{x=0}^{+\infty} \varphi(x)(a-x)e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}x$ est de signe constant, donc $\lambda \mapsto e^{a\lambda}F(\lambda)$ est monotone et change au plus une fois de signe. Pour n quelconque, on procède par récurrence sur n : si a un point de changement de signe pour f alors $\mathrm{d}(e^{a\lambda}F(\lambda))/\mathrm{d}\lambda$ change au plus $n-1$ fois de signe donc avec le théorème de Rolle, $e^{a\lambda}F(\lambda)$ change au plus n fois de signe.

Exercice 71.

L'intégrande tend simplement vers e^{-x} ; il reste à dominer. Pour $x \geqslant 0$ on a

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = 1 + x + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\frac{x^2}{2!} + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Cette expression est une fonction croissante de n à x fixé. Ainsi, $(1 + x/n)^n \geqslant (1 + x/3)^3$ pour $n \geqslant 3$, puis $0 \leqslant x^{-1/n}(1 + x/n)^{-n} \leqslant \max(1, x)(1 + x/3)^{-3}$, quantité intégrable. La limite demandée est donc $\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} \,\mathrm{d}x = 1$.