Quadriques

Exercice 1. *Étude d'équations*

Déterminer les natures des surfaces d'équation :

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.
2) $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.
3) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0$.
4) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0$.
5) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$.
6) $xy + xz + yz + 1 = 0$.
7) $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$.
8) $xy + yz = 1$.
9) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.

Exercice 2. *Repère non orthonormé*

Soit $\mathcal{S}$ une surface d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ dans un repère non orthonormé. Montrer que c'est quand même une quadrique.

Exercice 3. *Centre de symétrie*

Soit $\mathcal{S}$ une quadrique d'équation $f(x, y, z) = 0$. On note q la forme quadratique associée à f.

1) Montrer que, pour tout point A et tout vecteur h, on a : $f(A + h) = f(A) + (\nabla f(A) \mid h) + q(h)$.
2) On suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas incluse dans un plan. Montrer qu'un point Ω est centre de symétrie de $\mathcal{S}$ si et seulement si $\nabla f(\Omega) = 0$.
3) En déduire que si 0 n'est pas valeur propre de la matrice de q, alors $\mathcal{S}$ admet un centre unique.

Exercice 4. *Cône s'appuyant sur une ellipse*

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équations : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ et $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 \neq 0$. On note $\mathcal{C}$ le cône de sommet Ω engendré par $\mathcal{E}$.

1) Chercher une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
2) Quels sont les points Ω tels que $\mathcal{C} \cap Oyz$ soit un cercle ?

Exercice 5. *Sections circulaires*

1) On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ avec $a \in [b, c]$.
  a) Montrer qu'il existe $y, z \in \mathbb{R}$ tels que $y^2 + z^2 = 1$ et $by^2 + cz^2 = a$.
  b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.
2) Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de centre O. Montrer qu'il existe un plan P qui coupe $\mathcal{E}$ selon un cercle de centre O. Montrer que les sections de $\mathcal{E}$ par des plans parallèles à P sont des cercles.
3) Peut-on généraliser à une quadrique quelconque ?

Exercice 6. *Rotation d'une droite*

1) Soit D la droite d'équations $y = 1$, $x = \lambda z$ où λ est un réel non nul fixé. Déterminer une équation cartésienne et la nature de la surface $\mathcal{S}$ engendrée par la rotation de D autour de Oz.
2) En déduire que tout hyperboloïde de révolution à une nappe est réunion d'une famille de droites (*surface réglée*).
3) Généraliser à un hyperboloïde à une nappe quelconque.

Exercice 7. *Droites sur un paraboloïde hyperbolique*

Soit $\mathcal{P}$ le paraboloïde d'équation $z = xy$. Montrer que par tout point $M \in \mathcal{P}$, il passe deux droites et deux seulement incluses dans $\mathcal{P}$.

Exercice 8. *Hyperbole en rotation*
Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations : $x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0$, $x + z = 1$.
1) Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\mathcal{C}$.
2) Chercher une équation cartésienne de la surface $\mathcal{S}$ engendrée par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de Oz et reconnaître $\mathcal{S}$.

Exercice 9. *Volume d'un ellipsoïde*
Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Exercice 10. *Équation d'un cône*
Déterminer les réels λ tels que la surface d'équation : $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) = \lambda$ soit un cône. Préciser alors le sommet et la nature du cône.

Exercice 11. *Plan tangent à un ellipsoïde*
Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et P un plan d'équation $ux + vy + wz = 1$. Montrer que P est tangent à E si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$.

Exercice 12. *Normale à un ellipsoïde*
Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, M un point de $\mathcal{E}$, et P, Q, R les intersections de la normale en M à $\mathcal{E}$ avec les plans Oyz, Oxz, Oxy. Montrer que $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ sont dans un rapport constant (indépendant de M).

Exercice 13. *Points équidistants de deux droites*
Soient D, D' deux droites non coplanaires et $\mathcal{S}$ l'ensemble des points équidistants de D et D'. Montrer que $\mathcal{S}$ est un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 14. $MF = eMH$
On considère un point F, un plan P ne passant pas par F et un réel $e > 0$. Montrer que l'ensemble, $\mathcal{S}$, des points M tels que $MF = ed(M, P)$ est une quadrique de révolution. Préciser les différents cas possibles.

Exercice 15. $MF = ed(M, D)$
Dans l'espace, on considère un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel $e > 0$. Montrer que l'ensemble, $\mathcal{S}$, des points M tels que $MF = ed(M, D)$ est une quadrique. Préciser les différents cas possibles.

Exercice 16. $d(M, P)^2 + d(M, D)^2 = cste$
On considère un plan P et une droite D sécants. Déterminer le lieu des points M tels que $d(M, P)^2 + d(M, D)^2 = a$ (constante fixée).

Exercice 17. *Points équidistants d'un plan et d'une droite*
Dans l'espace, soit P le plan d'équation $z = 0$ et D la droite d'équations : $y = 0$, $x\cos\theta - z\sin\theta = 0$ $(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2})$.
Quel est le lieu des points M tels que $d(M, P) = d(M, D)$?

Exercice 18. *Sphères équidistantes d'une sphère et d'un plan*
Dans l'espace, on considère un plan P et une sphère S. Quel est le lieu des centres des sphères tangentes à S et à P ?

Exercice 19. *Appellations incontrolées*
La liste des quadriques semble comporter des oublis : paraboloïde parabolique, cône hyperbolique,... Dresser la liste de toutes les surfaces oubliées et constater qu'elles sont connues sous d'autres appellations.

solutions

Exercice 1.

1) vp $= 1, 1 \pm \sqrt{2}$. er : $X^2 + (1+\sqrt{2})Y^2 + (1-\sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde à 2 nappes.
2) vp $= -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0$. er : $-\frac{3}{2}(X^2+Y^2) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$ cylindre de révolution.
3) vp $= 0, 0, 14$. er : $14Z^2 + 4 = 0 \Rightarrow \varnothing$.
4) vp $= 0, -1 \pm \sqrt{7}$. er : $-(1+\sqrt{7})Y^2 + (-1+\sqrt{7})Z^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
5) vp $= 0, 2, 3$. er : $2Y^2 + 3Z^2 - \frac{8}{\sqrt{6}}X = 0 \Rightarrow$ paraboloïde elliptique.
6) vp $= -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$. er : $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ hyperboloïde de révolution à une nappe.
7) vp $= 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$. er : $\frac{9}{2}Y^2 - \frac{3}{2}Z^2 = 0 \Rightarrow$ deux plans sécants.
8) vp $= 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. er : $Y^2 - Z^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$ cylindre hyperbolique.
9) vp $= 1, 1, 0$. er : $X^2 + Y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ cylindre de révolution.

Exercice 4.

1) $\dfrac{(xz_0 - x_0z)^2}{a^2} + \dfrac{(yz_0 - y_0z)^2}{b^2} = (z - z_0)^2$.
2) $y_0 = 0$, $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{z_0^2}{b^2} = 1$.

Exercice 5.

3) Non lorsque la valeur propre médiane est nulle (paraboloïde hyperbolique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique, plans).

Exercice 6.

1) $x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 z^2$.

Exercice 8.

1) Hyperbole équilatère d'asymptotes : $x - z - 1 = \pm y\sqrt{2}$, $x + z = 1$.
2) $x^2 + y^2 = 2z^2$, cône de révolution.

Exercice 9.

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \dfrac{1}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V = \frac{8\pi}{3}$.

Exercice 10.

$\lambda = 0$: $S = (0,0,0)$, cône de révolution.
$\lambda = \frac{4}{3}$: $S = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, cône de révolution.

Exercice 12.

$\dfrac{MP}{a^2} = \dfrac{MQ}{b^2} = \dfrac{MR}{c^2}$.

Exercice 15.

$e < 1$: ellipsoïde de révolution, $e = 1$: cylindre parabolique, $e > 1$: hyperboloïde de révolution.

Exercice 16.

Ellipsoïde.

Exercice 17.

$x^2\cos^2\theta + y^2 - 2xz\cos\theta\sin\theta - z^2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow$ cône elliptique.

Exercice 18.

Soit r le rayon de S et h la distance du centre I de S à P. On choisit un repère tel que $P = Oxy$ et $I = (0,0,h)$. Soit S' une sphère de centre $M(x,y,z)$:
Pour $z > 0$:
S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$.
S à l'intérieur de S' $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h > r$.
S' à l'intérieur de S $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
Pour $z < 0$:
S et S' extérieures $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
S' à l'intérieur de S $\Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.