fonctions usuelles

logarithmes et exponentielles

Exercice 1. *Calcul de limite*
Montrer que : $\forall\, x > 0,\ x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

Exercice 2. *Dérivées de* $\exp(-1/x)$
On pose $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $P_n(x)x^{-2n}\exp(-1/x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ ($n \geqslant 1$).
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0^+.
3) Montrer que le polynôme P_n possède $n-1$ racines dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3. $(1+1/t)^t$
1) Montrer que : $\forall\, t > 1,\ \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t < e < \left(1+\dfrac{1}{t-1}\right)^t$.
2) Montrer que : $\forall\, x, y > 0,\ \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y < e^x < \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Exercice 4. $\ln(1+ax)/\ln(1+bx)$
Soient $0 < a < b$. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{cases}$ est croissante.

Exercice 5. *Inégalité*
Soient $0 < a < b$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

Exercice 6. *Racine d'une somme d'exponentielles*
Soient $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ des réels fixés.
1) Montrer que pour tout réel $a > a_p$ il existe un unique réel $x_a > 0$ solution de : $a_1^x + \ldots + a_p^x = a^x$.
2) Pour $a < b$, comparer x_a et x_b.
3) Chercher $\lim_{a\to+\infty} x_a$ puis $\lim_{a\to+\infty} x_a \ln a$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 7. *Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques*
Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{ch} b$, $\operatorname{sh} b$, $\operatorname{th} b$.

Exercice 8. *Simplification de* $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.
1) Peut-on trouver $A, \varphi \in R$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{ch}(x+\varphi)$?
2) Peut-on trouver $A, \varphi \in R$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{sh}(x+\varphi)$?

Exercice 9. *Somme de ch*
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Exercice 10. *Somme de sh*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Exercice 11. *Somme de th*
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\operatorname{th} x = 2\coth 2x - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\frac{1}{2^n}\operatorname{th}(\frac{1}{2^n}x)$.

Exercice 12. *Somme de* $1/\operatorname{sh}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} = \coth\dfrac{x}{2} - \coth x$. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$.

Exercice 13. *Polynômes de Chebicheff*

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

2) Même question avec $h_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x))$ et $k_n(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(n \operatorname{argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$.

3) Établir des relations entre les polynômes associés à f_n, g_n, h_n et k_n.

Exercice 14. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a$, $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence de solutions pour le système : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y & = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = b. \end{cases}$

Exercice 15. *Relation entre les fonctions hyperboliques et circulaires*

Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln(\tan(\frac{1}{2}y + \frac{\pi}{4}))$.

Montrer que $\operatorname{th}\frac{1}{2}x = \tan\frac{1}{2}y$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\cos y}$.

Exercice 16. $\operatorname{argth}((1 + 3\operatorname{th} x)/(3 + \operatorname{th} x))$

Simplifier $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1 + 3\operatorname{th} x}{3 + \operatorname{th} x}\right)$.

Exercice 17. *Équation*

Résoudre $\operatorname{argch} x = \operatorname{argsh}(x - \frac{1}{2})$.

Exercice 18. *Calcul de primitives*

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$.

Fonctions circulaires inverses

Exercice 19. *arcsin et arccos à partir de arctan*

Définir $\arcsin x$ et $\arccos x$ à l'aide de la fonction arctan.

Exercice 20. *Formules d'addition*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Simplifier $\arctan a + \arctan b$.

Exercice 21. $\arcsin x = \arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4}$

Résoudre l'équation : $\arcsin x = \arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4}$.

Exercice 22. $\arcsin\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Soit $x = \arcsin\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\cos 4x$ et en déduire x.

Exercice 23. *arctangentes*

1) Simplifier $\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$.

2) Simplifier $\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

3) Simplifier $\arctan\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

4) Simplifier $\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$.

5) Simplifier $\arctan\dfrac{1}{2x^2}-\arctan\dfrac{x}{x-1}+\arctan\dfrac{x+1}{x}$.

Exercice 24. $2\arcsin x+\arcsin f(x)=\frac{\pi}{6}$

Existe-t-il une fonction $f : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x\in D,\ 2\arcsin x+\arcsin f(x)=\frac{\pi}{6}$?

Exercice 25. *Simplifications*

1) Simplifier $\cos(3\arctan x)$ et $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2) Simplifier $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$ pour $x\in[0,2\pi]$.

3) Simplifier $\dfrac{x}{2}-\arcsin\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}}$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.

4) Simplifier $\cos(\arctan(\sin(\arctan\frac{1}{x})))$.

Exercice 26. *Équation*

Résoudre : $2\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)-\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 27. *Équations aux arctan*

Résoudre :

1) $\arctan 2x+\arctan 3x=\frac{\pi}{4}$.

2) $\arctan\dfrac{x-1}{x-2}+\arctan\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$.

3) $\arctan\dfrac{1}{x}+\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

4) $\arctan(x-3)+\arctan(x)+\arctan(x+3)=\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 28. *Sommes remarquables*

1) Montrer que : $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

2) Montrer que : $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 29. *Sommes remarquables*

1) Montrer que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \arctan x+2\arctan\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)=\frac{\pi}{2}$.

2) Montrer que : $\forall\, x\in\,]0,1],\ 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}+\arcsin(2x-1)=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 30. $\arctan((x-\sin a)/\cos a)$

Soit $a\in[0,\frac{\pi}{2}[$. On pose $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2(x-\sin a)\cos a}{x^2-2x\sin a+1}\right)$ et $g(x)=\arctan\left(\dfrac{x-\sin a}{\cos a}\right)$.

Vérifier que f est bien définie, calculer $\sin(2g(x))$ et comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 31. *Équivalent de* $\arccos(1-x)$

A l'aide d'un changement de variable judicieux, trouver $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 32. *Inégalité*

Montrer que : $\forall\, x\in\,]-1,1[,\ |\arcsin x|\leqslant\dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.

Divers

Exercice 33. *Centrale MP 2000*

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall\, x, y > 0,\ f(xf(y)) = yf(x)$ et $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

1) Montrer que f est involutive.

2) Montrer que f conserve le produit. Que peut-on dire de la monotonie de f, de sa continuité ?

3) Trouver f.

solutions

Exercice 3.

1) Étudier les logs.

2) Idem.

Exercice 4.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \dfrac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$. Pour $x \geqslant 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ est décroissante.

Exercice 6.

1) Étude de $x \mapsto \left(\dfrac{a_1}{a}\right)^x + \ldots + \left(\dfrac{a_p}{a}\right)^x$.

2) $x_a > x_b$.

3) $x_a \to \ell$. Si $\ell > 0$, $a^{x_a} \to +\infty$, mais $a_1^{x_a} + \ldots + a_p^{x_a} \to a_1^\ell + \ldots + a_p^\ell$. Donc $\ell = 0$, et $x_a \ln a \to \ln p$.

Exercice 8.

1) Oui ssi $|a| > |b|$.

2) Oui ssi $|a| < |b|$.

Exercice 9.

$= \dfrac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$.

Exercice 10.

$x = -\frac{2}{3}a$.

Exercice 11.

$2\coth 2x - \dfrac{1}{x}$.

Exercice 12.

$\coth\dfrac{x}{2} - 1$.

Exercice 13.

1) $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$.
$g_0(x) = 0$, $g_1(x) = 1$, $g_{n+1}(x) + g_{n-1}(x) = 2xg_n(x)$.

2) $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = x$, $h_{n+1}(x) + h_{n-1}(x) = 2xh_n(x)$.
$k_0(x) = 0$, $k_1(x) = 1$, $k_{n+1}(x) + k_{n-1}(x) = 2xk_n(x)$.

3) $f_n = h_n$, $g_n = k_n = \frac{1}{n}f_n'$.

Exercice 14.

Poser $X = e^x$, $Y = e^y$: $X + Y = a + b$, $XY = \dfrac{a+b}{a-b}$. Il y a des solutions si et seulement si $a \geqslant \sqrt{b^2+4}$.

Exercice 16.

$= x + \ln\sqrt{2}$.

Exercice 17.

$x = \frac{5}{4}$.

Exercice 18.

1) $F(x) = \operatorname{argsh}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

2) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}-2x-1}{\sqrt{5}+2x+1}\right|$.

Exercice 19.

$\arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 20.
$\arctan a + \arctan b \equiv \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \pmod{\pi}$.

Exercice 21.
$x = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$.

Exercice 22.
$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{10}$.

Exercice 23.
1) $x > -1$: $\frac{\pi}{4} - \arctan x$, $x < -1$: $-\frac{3\pi}{4} - \arctan x$.
2) $= \frac{1}{2}\arccos x$.
3) $-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\arcsin x + \frac{3\pi}{4}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1$: $\arcsin x - \frac{\pi}{4}$.
4) $= \frac{\pi}{4}$.
5) $= \pi$ si $0 < x < 1$, $= 0$ si $x < 0$ ou $x > 1$.

Exercice 24.
$D = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $f(x) = \frac{1}{2} - x^2 - x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 25.
1) $\cos(3\arctan x) = \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}$.
2) $= 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $= 2x - \pi$ si $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, $= 3\pi - 2x$ si $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $= 0$ si $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$.
3) $= x + \frac{\pi}{4}$ si $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $= -\frac{\pi}{4}$ si $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $= x - \frac{3\pi}{4}$ si $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.
4) $= \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Exercice 26.
Si $x < -1$, $f(x) = -8\arctan x - 2\pi$. Si $-1 < x < 0$, $f(x) = -4\arctan x$. Si $0 < x < 1$, $f(x) = 4\arctan x$. Si $x > 1$, $f(x) = 2\pi$. $S = \{-\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$.

Exercice 27.
1) $x = \frac{1}{6}$.
2) $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
3) $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
4) $x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow x \in \{5, -1 \pm \sqrt{3}\}$. Seule la solution $x = 5$ convient.

Exercice 30.
$\sin(2g(x)) = \sin(f(x))$.
$f(x) = -\pi - 2g(x)$ si $x \leqslant \sin a - \cos a$,
$f(x) = 2g(x)$ si $\sin a - \cos a \leqslant x \leqslant \sin a + \cos a$,
$f(x) = \pi - 2g(x)$ si $x \geqslant \sin a + \cos a$.

Exercice 33.
1) Pour $x = 1$ on a $f \circ f(y) = yf(1)$ donc f est injective et pour $y = 1$: $f(xf(1)) = f(x)$ d'où $f(1) = 1$.
2) $f(xy) = f(xf(f(y))) = f(y)f(x)$.
Pour $0 < x < 1$ on a $f(x^n) = f(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f(x) > 1$ ce qui entraîne par morphisme la décroissance de f. Enfin f est monotone et $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ donc f n'a pas de saut et est continue.
3) En tant que morphisme continu, f est de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et l'involutivité et la décroissance donnent $\alpha = -1$.