Trigonométrie

Exercice 1. *Équations trigonométriques*

Résoudre les équations suivantes :

1) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\theta+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\theta=2$
2) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$
3) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$
4) $\cos\theta-\cos 2\theta=\sin 3\theta$
5) $\cos\theta+\cos 7\theta=\cos 4\theta$
6) $\cos 2\theta+\cos 12\theta=\sqrt{3}\cos 5\theta$
7) $\sin 7\theta-\sin\theta=\sin 3\theta$
8) $\cos^3\theta\sin 3\theta+\cos 3\theta\sin^3\theta=\frac{3}{4}$
9) $\sin\theta\sin 3\theta=\sin 5\theta\sin 7\theta$
10) $3\tan\theta=2\cos\theta$
11) $\tan 4\theta=4\tan\theta$
12) $\operatorname{cotan}\theta-\tan\theta=\cos\theta+\sin\theta$
13) $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \tan(x+y)=\frac{4}{3}\end{cases}$

Exercice 2. *Inéquations*

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{\pi}{3})>0.$ **2)** $2\cos\theta+\sin\theta<2.$

Exercice 3. *Linéarisation*

Linéariser :

1) $2\cos^2\theta$
2) $2\sin^2\theta$
3) $4\cos^3\theta$
4) $4\sin^3\theta$
5) $8\cos^4\theta$
6) $8\sin^4\theta$
7) $32\cos^6\theta$
8) $32\sin^6\theta$
9) $32\cos^4\theta\sin^2\theta$
10) $32\sin^4\theta\cos^2\theta$
11) $16\cos\theta\sin^4\theta$
12) $16\sin\theta\cos^4\theta$
13) $4\sin\theta\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$

Exercice 4. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1) Démontrer que : $1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$.
2) Simplifier $\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)+\tan(\beta/2)\tan(\gamma/2)+\tan(\gamma/2)\tan(\alpha/2)$.

Exercice 5. $\sin^2(\theta-\alpha),\sin^2\theta,\sin^2(\theta+\alpha)$ *en progression arithmétique*

Montrer qu'il existe $\theta\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, les nombres $\sin^2(\theta-\alpha),\sin^2\theta,\sin^2(\theta+\alpha)$ soient en progression arithmétique.

Exercice 6. *Calcul de somme*

Calculer $\tan p-\tan q$. En déduire la valeur de $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. *Calcul de somme*

Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1}3^k\sin^3\left(\dfrac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$.

Exercice 8. *Calcul de somme*

Calculer $\operatorname{cotan}x-2\operatorname{cotan}2x$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{\alpha}{2^k}$.

Exercice 9. *Heptagone régulier*

Soit $ABCDEFG$ un heptagone (7 côtés) plan régulier. On pose $\alpha=AB$, $\beta=AC$, $\gamma=AD$ (distances). Montrer que $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$.

Exercice 10. *lignes trigonométriques algébriques*

1) calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
2) calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
3) calculer $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.
4) Montrer que $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$ (on pourra multiplier les deux membres par $\cos\frac{\pi}{14}$).

solutions

Exercice 1.

1) $4\cos(\theta-\frac{\pi}{12})=2 \Leftrightarrow \theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\pmod{2\pi}$.

2) $\sin\theta+\ldots+\sin 4\theta=2\sin\theta\cos\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=4\sin(\frac{5}{2}\theta)\cos\theta\cos(\frac{1}{2}\theta)$

$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos(\frac{2\pi}{5})$ ou $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin(\frac{2\pi}{5})$

$\Rightarrow$ modulo 2π, $\theta\in\{0,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\}$.

3) $\cos\theta\in\{-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}\Leftrightarrow\theta\equiv\pm\frac{2\pi}{3}\pmod{2\pi}$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}\pmod{\frac{\pi}{2}}$.

4) $2\sin(\frac{3}{2}\theta)\sin(\frac{1}{2}\theta)=2\sin(\frac{3}{2}\theta)\cos(\frac{3}{2}\theta)\Leftrightarrow\theta\equiv 0\pmod{\frac{2\pi}{3}}$ ou $\theta\equiv\frac{\pi}{4}\pmod{\pi}$ ou $\theta\equiv\frac{3\pi}{2}\pmod{2\pi}$.

5) $2\cos 4\theta\cos 3\theta=\cos 4\theta\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{8}\pmod{\frac{\pi}{4}}$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{9}\pmod{\frac{2\pi}{3}}$.

6) $2\cos 7\theta\cos 5\theta=\sqrt{3}\cos 5\theta\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{10}\pmod{\frac{\pi}{5}}$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{42}\pmod{\frac{2\pi}{7}}$.

7) $\theta\equiv 0\pmod{\frac{\pi}{3}}$ ou $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{12}\pmod{\frac{\pi}{2}}$.

8) $\cos^3\theta\sin 3\theta+\cos 3\theta\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin 4\theta\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{8}\pmod{\frac{\pi}{2}}$.

9) $\theta\equiv 0\pmod{\frac{\pi}{8}}$.

10) $\sin\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{6}\pmod{2\pi}$ ou $\theta\equiv\frac{5\pi}{6}\pmod{2\pi}$.

11) $\theta\equiv 0,\pm\arctan\sqrt{5}\pmod{\pi}$.

12) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)$.

$\cos\theta+\sin\theta=0\Leftrightarrow\theta\equiv-\frac{\pi}{4}\pmod{\pi}$.

$\cos\theta-\sin\theta=\cos\theta\sin\theta\Rightarrow(\cos\theta\sin\theta)^2+2\cos\theta\sin\theta=1\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}.\end{cases}$

Les valeurs trouvées conviennent.

13) $\tan x=\tan y=\frac{1}{2}$.

Exercice 2.

1) $-\frac{2\pi}{3}<\theta \bmod 2\pi<\frac{\pi}{3}$.

2) $2\alpha<\theta \bmod 2\pi<2\pi$ avec $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice 3.

1) $1+\cos 2\theta$

2) $1-\cos 2\theta$

3) $3\cos\theta+\cos 3\theta$

4) $3\sin\theta-\sin 3\theta$

5) $3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta$

6) $3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta$

7) $10+15\cos 2\theta+6\cos 4\theta+\cos 6\theta$

8) $10-15\cos 2\theta+6\cos 4\theta-\cos 6\theta$

9) $2+\cos 2\theta-2\cos 4\theta-\cos 6\theta$

10) $2-\cos 2\theta-2\cos 4\theta+\cos 6\theta$

11) $\cos 5\theta-3\cos 3\theta+2\cos\theta$

12) $\sin 5\theta+3\sin 3\theta+2\sin\theta$

13) $\sin 3\theta$

Exercice 4.

1) $1-\cos\alpha=2\sin(\alpha/2)\cos((\beta+\gamma)/2)$ et $\cos\beta+\cos\gamma=2\sin(\alpha/2)\cos((\beta-\gamma)/2)$.

2) $=1$.

Exercice 5.

$\Leftrightarrow\cos 2\theta=0$.

Exercice 6.

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$.

$S_n = \dfrac{\tan((n+1)\theta) - \tan\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta \neq 0$, $S_n = n$ si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $S_n = -n$ si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Exercice 7.

linéariser : $\Sigma = \frac{1}{4}\left(3^n \sin\dfrac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

Exercice 8.

$\operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan} 2x = \tan x$, $\Sigma = \dfrac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\dfrac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{cotan} 2\alpha$.

Exercice 9.

$\theta = \dfrac{\pi}{7}$: $\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\sin 3\theta} = \dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 3\theta} = \dfrac{1}{\sin 2\theta}$.

Exercice 10.

1) $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2\times 4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

2) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

3) $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \\ \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \end{cases}$