Fonctions monotones

Exercice 1. *f croissante et $f \circ f = \mathrm{id}$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 2. *f croissante et $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante*
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)/x \end{cases}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 3. *Étude de $|x|(2 + sin(1/x))$*
On pose : $f(x) = |x|(2 + \sin(1/x))$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 4. *Borne supérieure de fonctions croissantes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On note $\mathcal{E} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes tq $g \leqslant f\}$, et pour $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = \sup\{g(x)$ tq $g \in \mathcal{E}\}$.
1) Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{E}$.
2) On suppose f continue. Montrer que $\tilde{f}$ l'est aussi (s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(x_0^-) < \tilde{f}(x_0^+)$, construire une fonction de $\mathcal{E}$ supérieure à $\tilde{f}$).

Exercice 5. *L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone. Pour $x \in]a, b[$, on pose $\delta(x) = |f(x^+) - f(x^-)|$ (saut de f en x).
1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E_n = \{x \in]a, b[$ tq $\delta(x) > \frac{1}{n}\}$ est fini.
2) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 6. *Fonction localement croissante*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement croissante si : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, \varepsilon > 0$ tq $f_{|]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ est croissante.
Montrer que : (f est localement croissante) $\Rightarrow$ (f est croissante).
On pourra considérer $E = \{x \geqslant 0$ tq $f_{|[0,x]}$ est croissante$\}$ et $F = \{x \leqslant 0$ tq $f_{|[x,0]}$ est croissante$\}$)

Exercice 7. *Fonction localement monotone à droite*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0$, tq $\forall\, y \in [x, x + \delta]$, $f(y) \geqslant f(x)$. Montrer que f est croissante.

Exercice 8. *Prolongement d'une fonction uniformément continue*
Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Pour $x \in]0, 1]$ on pose : $g(x) = \sup(f(]0, x]))$ et $h(x) = \inf(f(]0, x]))$.
1) Montrer que g et h sont monotones.

On note $\ell = g(0^+)$ et $m = h(0^+)$.
2) En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que $\ell = m$.
3) En déduire que $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 9. *f continue, strictement croissante sur $\mathbb{Q}$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 10. *Morphismes de $\mathbb{R}$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.
Montrer que f est croissante, puis $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 11. *Point fixe pour une application croissante*
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
On pourra étudier $A = \{x \in [0, 1]$ tq $f(x) \leqslant x\}$.

Exercice 12. *Fonction affine*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x - y| < |x - z| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$. Montrer successivement que f est injective, monotone, continue, et enfin affine.

solutions

Exercice 7.

Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f(b) < f(a)$. On note $E = \{x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < f(a)\}$ et $c = \inf(E)$. On a $c \in E$ et $c > a$ par hypothèse et donc $f(c) = f(c^-) \geqslant f(a)$, absurde.

Exercice 11.

$\alpha = \inf(A) \Rightarrow f(\alpha^+) \leqslant \alpha$ et $f(\alpha^-) \geqslant \alpha$.

Exercice 12.

Injectivité évidente.

Monotonie : pour $a < b < c$ on a $|a - b| < |a - c|$ et $|c - b| < |c - a|$ d'où les mêmes inégalités pour $f(a), f(b), f(c)$ ce qui prouve que $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.

Continuité : soit $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $x = a - \delta$, $y = a + \delta$ et $z = a - 4\delta$. On a $2\delta = |x - y| < |x - z| = 3\delta$ donc $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$ et en faisant tendre δ vers 0^+ : $|f(a^-) - f(a^+)| \leqslant |f(a^-) - f(a^-)| = 0$.

Affine : soient $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $z = x + h$ et $x - h < y < x$. On a $|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(x + h)|$ d'où en faisant tendre y vers $(x - h)^+$: $|f(x) - f(x - h)| \leqslant |f(x) - f(x + h)|$. On obtient l'inégalité inverse en permutant y et z, donc $f(x - h)$ et $f(x + h)$ sont équidistants de $f(x)$ et, par injectivité de f : $f(x) = \frac{1}{2}(f(x - h) + f(x + h))$ ce qui permet de conclure avec la continuité de f.