Fonctions continues

Exercice 1. *Fonction périodique*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique cad : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
1) Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2) Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période.
3) Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 2. *Fonction ayant des limites à l'infini*
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.
1) Montrer que f est bornée.
2) Montrer que f admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécéssairement les deux.
3) Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3. *Permutation de décimales*
Pour $x \in [0, 1[$, on note $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x.
1) Soit $f : [0, 1[\to [0, 1[$ définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{10^k}$. Montrer que f est continue par morceaux.
2) Soit $g : [0, 1[\to [0, 1[$ définie par : $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_{2k}}{10^{2k-1}} + \frac{x_{2k-1}}{10^{2k}}\right)$. Déterminer les points où g est continue.

Exercice 4. $f(x+1) - f(x) \to a$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{\mathbb{R}}$.
1) Montrer que $\frac{f(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.
2) Montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Exercice 5. $\max(f, g)$
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue.

Exercice 6. *Prolongement d'inégalités*
1) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x, y \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
  a) Montrer que $f \leqslant g$.
  b) Montrer qu'on n'a pas nécéssairement : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 7. *Étude de* $\sup(f([x, x+1]))$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On pose $g(x) = \sup(f([x, x+1]))$. Montrer que g est continue.
Même question en supposant seulement f continue.

Exercice 8. *Weierstrass*
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On pose $h(t) = \sup\{f(x) + tg(x) \text{ tq } x \in [a, b]\}$. Montrer que h est continue.

Exercice 9. *Weierstrass*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\sup f([a, b]) = \sup f(]a, b[)$.

Exercice 10. *Weierstrass*
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a, b],\ f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f > kg$.

Exercice 11. *TVI à l'infini*
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 12. $f(x) = g(x)$
1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2) Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Exercice 13. *f continue décroissante $\Rightarrow$ point fixe*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f(x) = x$.

Exercice 14. *Mines MP 2002*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'existe a vérifiant $f \circ f(a) = a$. f a-t-elle des points fixes ? Généraliser.

Exercice 15. *Cordes de longueur $1/n$*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.
1) Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.
3) Trouver une fonction f telle que : $\forall\, x \in [0, \frac{3}{5}]$, $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$.
4) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall\, b \in\,]0, a]$, $\exists\, x \in [0, 1 - b]$ tq $f(x) = f(x + b)$.

Exercice 16. $f([a, b]) \subset g([a, b])$
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\, x \in [a, b]$, $\exists\, y \in [a, b]$ tq $f(x) = g(y)$.
Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 17. *TVI + injective $\Rightarrow$ continue*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b,\ \forall\, y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\ \exists\, x \in [a, b] \text{ tq } f(x) = y.$$

1) Montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective, alors elle est continue.
2) Trouver une fonction discontinue ayant la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 18. *f uc $\Rightarrow$ f(intervalle borné) = intervalle borné*
Soit I un intervalle borné et $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $f(I)$ est un intervalle borné.

Exercice 19. *f uc $\Rightarrow |f(x)| \leqslant a + b|x|$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a + b|x|$ (prendre $\varepsilon = 1$ et majorer $|f(x) - f(0)|$).

Exercice 20. *Composition*
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 21. $\sin(t^2)$
Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22. *f uc et $f(n) \to +\infty$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 23. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On pose $a = f(1)$.
1) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
2) On suppose f continue. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
3) On suppose que f est bornée au voisinage de 0. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 24. $f(x^2) = f(x)$
Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in [0,1]$, $f(x^2) = f(x)$.

Exercice 25. $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$.

Exercice 26. *Polytechnique MP* 2000*
Soit f continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et δ un réel positif.
On note $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x - y| \leqslant \delta\}$. Montrer que $\omega(\delta)$ tend vers 0 quand δ tend vers 0, puis que ω est continue.

Exercice 27. *Ensae MP* 2003*
Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 28. *Plus grande fonction lipschitzienne minorant f (Ens Lyon MP* 2003)*

1) Existe-t-il toujours φ lipschitzienne telle que $\varphi \leqslant f$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application continue donnée ?
2) Soit $k > 0$. Trouver une CNS sur f pour qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-lipschitzienne minorant f.
3) On suppose cette CNS vérifiée pour $k_0 > 0$. Montrer que si $k \geqslant k_0$ alors il existe φ_k, k-lipschitzienne minorant f et maximale pour l'ordre usuel des fonctions.

Exercice 29. *Suite $(f(nx))$ ENS Cachan MP* 2004*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x > 0$ la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Que peut-on dire de f ?

Exercice 30. *Contraction, ENS MP 2012*
Soit f une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $0 < \lambda = f'(0) < 1$. Montrer qu'il existe φ homéomorphisme local tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\,\mathrm{id}$.

solutions

Exercice 12.

1) $f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1.

2) Sinon $f - g$ est de signe constant, par exemple positif. Si a est le plus grand point fixe de f alors $g(a) > a$ et $g(a)$ est aussi point fixe de f, absurde.

Exercice 14.

En posant $b = f(a)$ on a $(f(a)-a)+(f(b)-b) = 0$ donc $x \mapsto f(x)-x$ s'annule entre a et b. De même, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^k(a) = a$ alors $(f(a) - a) + (f^2(a) - f(a)) + \ldots + (f^k(a) - f^{k-1}(a)) = 0$ donc $f(x) - x$ s'annule entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.

Exercice 17.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f est discontinue en a. Il existe une suite a_n telle que $a_n \to a$ et $|f(a_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. Alors $f(a) \pm \varepsilon$ a une infinité d'antécédents.

Exercice 25.

Si f n'est pas identiquement nulle, alors $f(0) = \pm 1$ et f est paire, de signe constant. Par récurrence, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $f(px) = \pm f^{p^2}(x)$ et par densité, $f(x) = \pm \lambda^{x^2}$.

Exercice 26.

$\omega(\delta) \underset{\delta \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow f$ est uniformément continue.

Continuité en $\delta > 0$: on remarque que ω est croissante donc $\omega(\delta^-)$ et $\omega(\delta^+)$ existent et encadrent $\omega(\delta)$. Si $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta^+$, soient x_n, y_n tels que $\omega(\delta_n) = |f(x_n) - f(y_n)|$ et $|x_n - y_n| \leqslant \delta_n$. On extrait de (x_n, y_n) une suite convergente vers (x, y) avec $|x - y| \leqslant \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta^+)$ d'où $\omega(\delta^+) \leqslant \omega(\delta)$ puis $\omega(\delta^+) = \omega(\delta)$.

On a aussi $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ tq } |x - y| < \delta\} \leqslant \omega(\delta^-)$ d'où $\omega(\delta^-) = \omega(\delta)$.

Exercice 27.

f admet des points fixes car l'application $x \mapsto f(x) - x$ change de signe entre 0 et 1. Si E est l'ensemble des points fixes de f alors E est stable par g donc $f - g$ a des signes opposés en $\min(E)$ et $\max(E)$.

Exercice 28.

1) Non. Si φ est lipschitzienne alors $\varphi(x) = \mathcal{O}(\|x\|)$ lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini, donc toute fonction f à décroissance suffisament rapide vers $-\infty$ n'est pas minorable par une fonction lipschitzienne. Contre-exemple explicite : $f(x) = -\|x\|^2$.

2) CNS : $x \mapsto f(x) + k\|x\|$ est minorée.

3) On pose $\varphi(x) = \sup\{g(x),\ g\ k\text{-lipschitzienne minorant } f\}$. Il suffit de vérifier que φ est k-lipschitzienne, ce sera alors la plus grande fonction k-lipschitzienne minorant f. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ et g_x, g_y des fonctions k-lipschitziennes minorant f telles que $g_y(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_x(x) + \varepsilon$ et $g_x(y) \leqslant \varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon$. On a :

$$\varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon \leqslant g_y(x) + k\|x - y\| + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + k\|x - y\| + \varepsilon,$$
$$\varphi(y) \geqslant g_x(y) \geqslant g_x(x) - k\|x - y\| \geqslant \varphi(x) - k\|x - y\| - \varepsilon.$$

Donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k\|x - y\| + \varepsilon$ et on fait tendre ε vers 0^+.

Exercice 29.

Soit pour $x > 0$, $\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} f(nx)$. On a $\ell(kx) = \ell(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'où aussi pour tout $k \in \mathbb{Q}^{+*}$. Montrons alors que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(1)$: soit $\varepsilon > 0$ et δ associé dans la définition de l'uniforme continuité de f. On choisit un rationnel $\alpha \in]0, \delta[$ et un entier N tel que $|f(n\alpha) - \ell(1)| = |f(n\alpha) - \ell(\alpha)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $|f(x) - \ell(1)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x \geqslant N\alpha$.

Exercice 30.

« homéomorphisme local » signifie « bijection continue d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 à réciproque continue ». Disons plutôt : φ est continue strictement monotone de $[-\alpha, \alpha]$ sur $[-\beta, \gamma]$ avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $\forall\, x \in\,]-\alpha, \alpha[$, $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x)$.

Par continuité de f', il existe μ, ν et $\alpha > 0$ tels que $\forall\, x \in\,]-\alpha, \alpha[$, $0 < \mu \leqslant f'(x) \leqslant \nu < 1$ En particulier f induit une bijection strictement croissante de $[-\alpha, \alpha]$ sur $[f(-\alpha), f(\alpha)]$ et l'on a $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in\,]0, \alpha]$ et les inégalités inverses pour tout $x \in [-\alpha, 0[$.

Construisons φ sur $]0, \alpha]$ par raccordements de la manière suivante : on choisit φ sur $[f(\alpha), \alpha]$ continue strictement croissante à valeurs strictement positives avec $\varphi(f(\alpha)) = \lambda\varphi(\alpha)$. Puis on prolonge φ sur $[f^2(\alpha), f(\alpha)[$ en posant $\varphi(t) = \lambda\varphi(f^{-1}(t))$ pour tout $t \in [f^2(\alpha), f(\alpha)[$. Il y a raccordement par continuité en $f(\alpha)$ et la fonction prolongée est continue strictement croissante sur $[f^2(\alpha), \alpha]$. On prolonge alors φ sur $[f^3(\alpha), f^2(\alpha)[$ par la même formule : $\varphi(t) = \lambda\varphi(f^{-1}(t))$, et ainsi de suite. Par hypothèse sur f, la suite $(f^k(\alpha))$ est strictement décroissante de limite nulle donc φ est à présent définie, continue et strictement croissante sur $]0, \alpha]$.

Par construction, $\varphi(f^k(\alpha)) = \lambda^k\varphi(\alpha) \longrightarrow 0$ lorsque $k \to \infty$ donc avec la croissance de φ, on obtient $\varphi(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to 0^+$. En posant $\varphi(0) = 0$ on a à présent φ continue strictement croissante sur $[0, \alpha]$. Il ne reste plus qu'à recommencer la construction sur $[-\alpha, 0[$ puis à souhaiter une bonne continuation à l'examinateur.