Équations différentielles linéaires

Exercice 1. *Équations linéaires d'ordre 1*

Intégrer les équations suivantes :

1) $(2+x)y' = 2-y$.
2) $xy' + y = \cos x$.
3) $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
4) $x^3y' - x^2y = 1$.
5) $3xy' - 4y = x$.
6) $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.
7) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.
8) $x(x+1)y' + y = \arctan x$.
9) $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.

Exercice 2. *Équations d'ordre 2 à coefficients constants*

Intégrer :

1) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
2) $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.
4) $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.
5) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6) $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme.
7) ${y'}^2 + y^2 = 1$ (dériver).

Exercice 3. *Équations d'ordre 2 à coefficients non constants*

Intégrer les équations suivantes :

1) $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
2) $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
3) $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x$ (poser $u = \ln x$).
5) $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
6) $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ $\left(\text{poser } y = \dfrac{u}{x^2}\right)$.
7) $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales).
8) $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

Exercice 4. *Résolution par DSE*

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1) $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.
2) $xy'' + 2y' - xy = 0$.
3) $4xy'' + 2y' - y = 0$.
4) $y'' + xy' + 3y = 0$.
5) $x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$.
6) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Exercice 5. $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Exercice 6. $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Exercice 7. $y' = |x-y|$

Résoudre l'équation : $y' = |x-y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

Exercice 8. $y'' + |y| = 1$

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 9. *Mines MP 2000*

Résoudre (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz = 1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

Exercice 10. *Mines MP 2000*
Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
1) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.
2) Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, g l'est également. Relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11. *Solution L^2, X 2013*
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, L^2. On considère l'équation différentielle $y' - ay = f(t)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant cette équation et qui est L^2.

Exercice 12. *Systèmes différentiels à coefficients constants*
x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

1) $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

Exercice 13. *Système différentiel à coefficients non constants*
Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$

Exercice 14. *Lemme des noyaux, Matexo*
Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y'' + py' + qy = 0$. On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f) = f'$.
1) D peut elle être une homothétie ?
2) Déterminer les valeurs de p et q pour lequelles D n'est pas un isomorphisme de S.
3) Vérifiez que $D \circ D + pD + q\,\mathrm{id}_S = 0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D - r_1\,\mathrm{id}_S) \circ (D - r_2\,\mathrm{id}_S) = 0$.
4) Les applications $D - r_1\,\mathrm{id}_S$, $D - r_2\,\mathrm{id}_S$ peuvent-elles être inversibles ?

Exercice 15. *$y'' + xy' + y = 0$, Matexo*
On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
1) Montrer que les dérivées de y vérifient $y^{(n)} + x\,y^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geqslant 2$.
2) Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.
3) Montrer que y admet le développement limité à l'origine $(x \to 0)$:

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}).$$

Exercice 16. *$f''(x) + f(-x) = x\cos x$*
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x\cos x$.

Exercice 17. $y'' + \dfrac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$

On considère l'équation différentielle : $(*) \Leftrightarrow y'' + \dfrac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$.

1) On pose $z(x) = y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th} x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
2) Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
3) Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x) \underset{x\to 0-}{\longrightarrow} 1$.
4) Démontrer que y_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\dfrac{y_0'(x)}{\operatorname{th} x}$ admet une limite finie en 0.
En déduire que y_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5) Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Exercice 18. $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \quad E \\ f & \longmapsto \quad g : t \mapsto f'(t) + tf(t). \end{cases}$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Exercice 19. $x^2 f''(x) + xf'(x) = \lambda f(x)$

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :
1) $E = \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P)(X) = X^2P''(X) + XP'(X)$.
2) $E = \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, $\Phi(f)(x) = x^2 f''(x) + xf'(x)$.
3) $E = \mathcal{C}^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ $\Phi(f)(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\, f'(x)$.

Exercice 20. $AP' - nA'P = \lambda P$

Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.
1) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
a) $A = X^2 - 1$, **b)** $A = X^2$, **c)** $A = X^2 + 1$.

Exercice 21. *Équation intégrale*

Trouver les applications $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_{t=0}^{x} g^2(t)\, dt = \frac{1}{x}\left(\int_{t=0}^{x} g(t)\, \mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice 22. *Inéquations différentielles*

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et y, z solutions de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leqslant a(t)z + b(t). \end{cases}$

Démontrer que : $\forall\, t \geqslant 0$, on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Exercice 23. *Tangentes parallèles ou concourantes*

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' = a(x)y + b(x)$ et x_0 un réel fixé. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles ou concourantes.

Exercice 24. *$y' + ay =$ fct périodique*

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique, continue. On considère l'équation : $(*) \Leftrightarrow y' + \lambda y = \varphi(x)$.

1) Montrer que si y est solution de $(*)$, alors $x \mapsto y(x+T)$ est aussi solution.

2) En déduire que y, solution de $(*)$, est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

3) Montrer que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ, l'équation $(*)$ admet une et une seule solution T-périodique.

Exercice 25. *Coefficients périodiques*

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont des fonctions continues, T-périodiques.

1) Montrer que si y est solution de $(*)$, alors la fonction définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.

2) En déduire que si $\int_{t=0}^{T} a(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, alors $(*)$ admet une unique solution T-périodique.

Exercice 26. *Équation intégrale*

Soit $E = \{$ fcts : $[0,1] \to \mathbb{R}$ continues $\}$ et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{cases}$ avec $g(x) = \int_{t=0}^{1} \inf(t,x) f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chercher les valeurs propres et les fonctions propres de Φ.

Exercice 27. *Matexo*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère : $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ tq $f(0) = 0$ et $f(1) = 3\}$.

Déterminer $\displaystyle\inf_{f\in E} \int_{t=0}^{1} (f'(t) + kf(t))^2\,\mathrm{d}t$. *Indication : poser $f' + kf = g$ et calculer $f(1)$ en fonction de g.*

Exercice 28. *Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000*

Soient u, v, w trois applications bornées et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^{\infty} \|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite de terme général t_n tendant vers $+\infty$ telle que $u(t_n)$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers a.

2) Montrer que les suites de termes généraux $v_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,\mathrm{d}t$ et $w_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,\mathrm{d}t$ tendent vers 0.

Exercice 29. *Centrale MP 2001*

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y + f = 0$.

1) Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 30. *Centrale MP 2001*

Trouver les fonctions f, g continues vérifiant : $\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = x - 1 + g(x)$ et $\int_{t=0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = x - 1 + f(x)$.

Exercice 31. *Polytechnique PC 2002*

Soit l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d\cos(x))u(x) = 0$.

1) Existence et domaine de définition des solutions maximales A et B telles que $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ et $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$.

2) Montrer que A est paire et B est impaire.

3) Montrer que $A(k,d,x) = A(k,0,x) + 2d \int_{t=0}^{x} B(d,0,x-t) A(k,d,x)\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32. *$f \mapsto f + f'$ (Mines MP 2003)*

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.

Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f + f'. \end{cases}$

1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

2) Est-ce que u est injectif ?

3) Est-ce que u est surjectif ?

Exercice 33. *Centrale MP 2004*
On considère l'équation différentielle : $-y'' + \dfrac{y}{p^2} = f$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction continue donnée.

1) Donner les solutions de cette équation. Montrer que $x \mapsto -\int_{t=0}^{x} pf(t)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{x-t}{p}\Big)\,dt$ est solution.
2) Montrer qu'il existe une unique solution telle que $y(0) = y(1) = 0$. On la note u_p.
3) Montrer que (u_p) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 34. *Centrale MP 2004*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} + (1-\lambda)x^2u(x) = 0$.

1) Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est une fonction développable en série entière.
2) Déterminer les valeurs de λ telles que H soit une fonction polynomiale non nulle.

Exercice 35. *Lemme de Gronwall (X MP* 2003)*
Soient f, g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, t \geqslant 0,\ g(t) \geqslant 0$ et $f(t) \leqslant a + \int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$.
Montrer : $\forall\, t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant a\exp\Big(\int_{u=0}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u\Big)$.

Exercice 36. $y'' + y \geqslant 0$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geqslant 0$.
Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice 37. $f'' + f' + f \to 0$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(t) + f'(t) + f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer que $f(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 38. $f'' \geqslant f + 2/\operatorname{ch}(x)^3$, *Centrale PC 1997*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geqslant f(x) + \dfrac{2}{\operatorname{ch}(x)^3}$.
Montrer pour tout x : $f(x) \geqslant \dfrac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}$.

Exercice 39. $y' + ay = b,\ y(-\infty) = 0$
Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x) \geqslant 1$ et $b(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
1) Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.
2) On suppose $b(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Exercice 40. $y'' + ay = 0,\ a > 0 \Rightarrow y$ *s'annule*
Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.
1) Soit y une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
2) Soit z une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. $y'' + ay = 0$ *avec* a *croissante positive* $\Rightarrow y$ *est bornée*
Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$ (on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$).

Exercice 42. $y'' + ay = 0$, a *intégrable*
Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$ (on commencera par prouver que si y_1, y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant).

Exercice 43. *Zéros entrelacés (Centrale MP 2003)*

Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a,b]$ telles que : $\forall\, x \in I$, $r(x) \geqslant q(x)$. On considère les équations différentielles : $(E_1) \Leftrightarrow y'' + qy = 0$, et $(E_2) \Leftrightarrow z'' + rz = 0$.

1) Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?

2) Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.

3) Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

4) Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Exercice 44. *Zéros des solutions de $y'' + ay' + by = 0$*

On considère l'équation $(*) \Leftrightarrow y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a, b continues.

1) Soit y une solution non nulle de $(*)$. Montrer que les zéros de y sont isolés.

2) Soient y, z deux solutions de $(*)$ non proportionelles.

a) Montrer que y et z n'ont pas de zéros commun.

b) Montrer que si u, v sont deux zéros consécutifs de y, alors z possède un unique zéro dans l'intervalle $]u, v[$ (étudier z/y).

Exercice 45. $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$

Soit $\lambda > 0$ et y une solution de $y'' + \left(1 + \dfrac{\lambda}{t^2}\right) y = 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y a un zéro dans l'intervalle $]a, a+\pi[$ (étudier $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t-a)$).

Exercice 46. $y'' + e^t y = 0$

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1) Montrer que l'ensemble des zéros de y est infini dénombrable.

2) On note a_n le $n$ème zéro positif de y.

En utilisant les fonctions $\varphi(t) = \sin\Big(e^{a_n/2}(t - a_n)\Big)$ et $\psi(t) = \sin\Big(e^{a_{n+1}/2}(t - a_n)\Big)$, montrer que $\dfrac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \dfrac{\pi}{e^{a_n/2}}$.

3) Donner un équivalent de a_n quand $n \to \infty$.

Exercice 47. *Conditions aux limites*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec f positive. Montrer qu'il existe une unique solution pour le problème aux limites : $y'' = f(t)y + g(t)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Exercice 48. *Comparaison de solutions*

Soient $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues avec : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $q(x) < 0$. Soient $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ y'' + p(x)y' + q(x)y \leqslant z'' + p(x)z' + q(x)z \\ y(a) \leqslant z(a),\ y'(a) < z'(a). \end{cases}$$

Montrer que : $\forall\, x > a$, $y(x) < z(x)$.

Exercice 49. *Système différentiel à coefficients positifs*

Soit $A : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & (a_{ij}(t)) \end{cases}$ continue avec : $\forall\, t \geqslant 0$, $\forall\, i, j$, $a_{ij}(t) \geqslant 0$ et X une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que si toutes les coordonnées de $X(0)$ sont positives ou nulles il en est de même pour $X(t)$ pour tout t (commencer par le cas strictement positif).

Exercice 50. $\int_0^{+\infty} \sin t/t \,\mathrm{d}t$

Soit $f(x)=\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et prouver que f est continue.
2) Justifier : $\forall\, x>0,\ f(x)+f''(x)=1/x$.
3) Résoudre l'équation précédente par la méthode de variation des deux constantes.
On introduira : $C(x)=\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $S(x)=\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
4) En déduire : $\forall\, x>0,\ f(x)=\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.
5) En déduire : $\int_{t=0}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 51. *Intégrale fonction d'un paramètre*

On pose $f(x)=\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}e^{itx}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. Former une équation différentielle satisfaite par f. En déduire f.

Exercice 52. *Ulm MP* 2000*

Soit $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I.
On pose $E=\{f\in\mathcal{C}^2(I) \text{ tq } f(a)=f(b)=0\}$. On considère enfin l'opérateur $K : f\mapsto \dfrac{f''}{\Delta}$.

1) Montrer que $\mathrm{Sp}(K)\subset\,]-\infty,0[$.
2) Trouver un produit scalaire $(\ |\ )$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3) On suppose que $I=\mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x)\geqslant 1$ pour $x\geqslant 2$. Soit $\lambda<0$.
a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle $f''_\lambda=\lambda\Delta f_\lambda$, $f_\lambda(0)=0$, $f'_\lambda(0)=1$.
b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros $(x_0<x_1<\ldots<x_n<\ldots)$ et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 53. *Centrale MP 2001*

1) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(\pi)=0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2\leqslant\int_0^\pi f'^2$.
Indication : prolonger f en une fonction impaire 2π-périodique.
2) Soit une fonction q de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, à valeurs dans $]-\infty,1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''(t)+q(t)x(t)=0$ est la fonction nulle.
3) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et deux réels a,b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $x(0)=a$, $x(\pi)=b$ et $x''(t)+q(t)x(t)=f(t)$.

Exercice 54. *X MP* 2000*

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur $\mathbb{R}$: $x''+p(t)x'+q(t)x=0$. Trouver une condtion nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbb{R}$ dont le produit vaut constamment un.

Exercice 55. *X MP* 2000*

Soit A coninue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit $\mathbb{R}^+$, et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y'=AY$ valant X_0 en $t=0$, on a pour tout $t\geqslant 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t)\geqslant 0$.

Exercice 56. *ENS MP 2002*

Soit une application A de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{C}^n$. Montrer qu'il existe X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{C}^n$, solution de $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$.
Indication : commencer par le cas $n=1$, A constante.

Exercice 57. *X MP* 2003*

1) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $k > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{u=t_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$.
Montrer que : $\forall\, t \geqslant t_0,\ f(t) \leqslant g(t) + k\int_{u=t_0}^{t} e^{k(t-u)}g(u)\,\mathrm{d}u$.

2) Soient $A, B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T > t_0$, $K > 0$ et $\eta > 0$ tels que : $\forall\, t \in [t_0, T],\ \|A(t)\| \leqslant K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leqslant \eta$.
On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy : $M(t_0) = I,\ M'(t) = A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0) = I,\ N'(t) = B(t)N(t)$). Montrer que : $\forall\, t \in [t_0, T],\ \|M_0(t) - N_0(t)\| \leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.

3) On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$: $X(t_0) = \alpha,\ X'(t) = A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0) = \alpha,\ Y'(t) = B(t)Y(t)$) où $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on sur $\|X_0(t) - Y_0(t)\|$?

Exercice 58. *$y' + y = \varphi$, Mines 2015*

1) Soit l'équation différentielle $f' + f = \varphi$, avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. Exprimer f en fonction de φ.

2) On suppose que φ^2 intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Montrer que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3) Montrer que l'on a les mêmes résultats en supposant φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 59. *$y'' + y = f$, Mines-Ponts 2015*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone admettant une limite finie à l'infini. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + y = f$ est bornée.

Exercice 60. *Équation de Legendre, ENS 2015*

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0$.

1) Montrer qu'il existe une solution particulière y_k continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont proportionnelles à y_k.

Exercice 61. *Cauchy-Abel, X 2014*

Soient $R > 0$ et $b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à R. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une unique série entière $a(z)$ de rayon de convergence au moins égal à R telle que $a(0) = \lambda$ et $\forall\, z \in D(0, R),\ a'(z) = b(z)a(z)$.

Exercice 62. *Centrale 2014*

Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont positives et $t \mapsto X(t)$ solution de $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Que dire si A est antisymétrique ?

Exercice 63. *Mines 2014*

1) Montrer que les solutions de $y'' + e^x y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

2) Trouver une solution bornée sur $\mathbb{R}$. Le sont-elles toutes ?

Exercice 64. *Mines MP 2012*

Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $y' - y = e^{-x^2}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$.

Exercice 65. *Mines 2017*

On s'intéresse à d'éventuelles solutions sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation : $y'' + \dfrac{x}{1 + x^3}y = 0$.

1) Soit y une solution bornée. Montrez que $\lim_{x\to+\infty} y' = 0$. *Indication : commencez par montrer que y' admet une limite finie en $+\infty$.*

2) Montrez que l'équation admet des solutions non bornées.

Exercice 66. *Mines 2017*

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - y = \frac{1}{1+x^2}$.

1) Donner la solution générale de (E).

2) Montrer qu'il existe une unique fonction bornée solution de (E).

solutions

Exercice 1.

1) $y = 2 + \dfrac{\lambda}{x+2}$.

2) $y = \dfrac{C + \sin x}{x}$.

3) $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1+x}$.

4) $y = \lambda x - \dfrac{1}{3x^2}$.

5) $y = \lambda x^{4/3} - x$.

6) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{3\sin 2x - 6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

7) $y = \dfrac{\operatorname{argch}(1-2x) + \lambda}{2\sqrt{x^2 - x}}$ pour $x < 0$

$y = \dfrac{\arcsin(2x-1) + \mu}{2\sqrt{x - x^2}}$ pour $0 < x < 1$

$y = \dfrac{-\operatorname{argch}(2x-1) + \nu}{2\sqrt{x^2 - x}}$ pour $1 < x$.

8) $y = \dfrac{x-1}{2x}\arctan x + \dfrac{x+1}{2x}\left(\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda\right)$.

9) $y = \dfrac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big)$.

Exercice 2.

1) $y = (x + a\cos x + b\sin x)e^x$.

2) $y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.

3) $y = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.

4) $y = \sin x \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + \lambda\cos x + \mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).

5) $y = (\lambda + \ln|x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

6) $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P^{(2n)}(x)$.

7) $y = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou $y = \pm 1$.

Exercice 3.

1) $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.

2) $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \dfrac{2x^2+3}{16}$.

3) $y = \lambda x^2 + \mu\ln x$.

4) $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.

5) $y = x^2\ln|x+1| + \lambda\left(x^2\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + x - \dfrac{1}{2}\right) + \mu x^2$.

6) $y = \dfrac{-1 + a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}{x^2}$.

7) $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.

8) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x) + b(x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

Exercice 4.

1) $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0\cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ a_0\operatorname{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$

Solution générale : $y = \begin{cases} a\cos u + b\sin u & \text{si } x \geqslant 0 \\ a\operatorname{ch} u + b\operatorname{sh} u & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$ avec $u = |x|^{3/2}$.

2) $n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

Solution générale : $y = \dfrac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x}{x}$.

3) $(2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0\operatorname{ch}(\sqrt{x})$.
Solution générale sur $\mathbb{R}^+$: $u = a\operatorname{ch}(\sqrt{x}) + b\operatorname{sh}(\sqrt{x})$.

4) $n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0 \Rightarrow y = a_0(1-x^2)e^{-x^2/2} + a_1 z$.
Solution générale : $y = (1-x^2)e^{-x^2/2}(a + bF(x)) + bx$ avec $F(x) = \int_{t=0}^{x} e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

5) $(n+2)(n+3)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = \dfrac{x - \operatorname{sh} x}{x^3}$.

Solution générale : $y = \dfrac{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x + x}{x^3}$.

6) $na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow y = \dfrac{\lambda x}{(1-x)^2}$.

Solution générale : $y = \dfrac{ax + b(1 + x\ln|x|)}{(1-x)^2}$.

Exercice 5.

$|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Cette série converge et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π-périodiques.

Exercice 6.

$k \notin \mathbb{Z}$: $y = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\sin kx$.

$k \in \mathbb{Z}$: remplacer $\dfrac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ par $\dfrac{x\sin kx}{2k^3}$.

Exercice 7.

$y = x + 1 + \lambda e^x$ ou $y = x - 1 + \lambda e^{-x}$.

Exercice 8.

$y = e^x - 1$ si $x < 0$; $y = 1 - \cos x + \sin x$ si $0 \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$; $y = e^{3\pi/2 - x} - 1$ si $x \geqslant \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 9.

$4xz'' + 2z' + z = \dfrac{-1}{y^2}\Big(4xy'' + 2y' - y - \dfrac{8xy'^2}{y}\Big) = \dfrac{2}{y^3}(y^2 + 4xy'^2)$ donc $\dfrac{y'}{y} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{-4x}}$ et $y = \lambda\exp(\pm\sqrt{-x})$ pour $x < 0$.

Résolution sans indication : on pose $x = \varepsilon t^2$ et $y(x) = z(t)$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon z = 0$.

Exercice 10.

1) $g(x) = be^{-ax} + \int_{t=0}^{x} e^{a(t-x)}f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) $\int_{x=0}^{X} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{b}{a}(1 - e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\int_{x=t}^{X} e^{a(t-x)}f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \dfrac{b}{a}(1 - e^{-aX}) + \int_{t=0}^{X}\dfrac{1 - e^{a(t-X)}}{a}f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc l'intégrale de g converge. On montre la convergence absolue par majoration élémentaire.

Exercice 11.

Comme deux solutions diffèrent par un multiple de e^{at}, il y en a au plus une de carré sommable. En s'inspirant de la formule de Duhamel, on essaye $y(t) = -\int_{s=t}^{+\infty} e^{a(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{u=0}^{+\infty} e^{-au} f(t+u)\,\mathrm{d}u$. La deuxième intégrale converge car $u \mapsto e^{-au}$ et $u \mapsto f(t+u)$ sont de carrés intégrables et on vérifie avec la première intégrale que c'est bien une solution de $y' - ay = f$. De plus, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $y^2(t) \leqslant \int_{u=0}^{+\infty} e^{-2au}\,\mathrm{d}u \times \int_{u=0}^{+\infty} f^2(t+u)\,\mathrm{d}u \leqslant \dfrac{1}{2a}\int_{u=t}^{+\infty} f^2(u)\,\mathrm{d}u$. En particulier y^2 est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, on a $yy' - ay^2 = yf \geqslant -\frac{1}{2}(ay^2 + f^2/a)$, d'où $\dfrac{a}{2}y^2 \leqslant \dfrac{1}{2a}f^2 + yy'$ et en intégrant :

$\dfrac{a}{2}\int_{t=\alpha}^{\beta} y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{2a}\int_{t=\alpha}^{\beta} f^2(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{y^2(\beta) - y^2(\alpha)}{2}$.

Ainsi, les intégrales $\int_{t=\alpha}^{\beta} y^2(t)\,\mathrm{d}t$ sont bornées, ce qui prouve que $y \in L^2$.

Exercice 12.

1) $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}, \quad y = (\gamma t + \beta)e^{2t}, \quad z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}$.

2) $y = -1 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}, \quad z = -1 + \lambda(1+\alpha)e^{\alpha t} + \mu(1+\beta)e^{\beta t}, \quad \alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

3) $y = \dfrac{-9\cos t - 13\sin t}{25} + (at+b)e^{2t}, \quad z = \dfrac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at+a+b)e^{2t}$.

4) $x = (a + bt + ct^2)e^t, \quad y = \left(a + \dfrac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t, \quad z = \left(a - \dfrac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t$.

5) $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t}$,
$y = \frac{1}{2}(-a + 5b + 3c) - 2(b+c)e^t + \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
$z = \frac{1}{2}(a - 5b - 3c) + 3(b+c)e^t - \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.

6) $x = (at^2 + (a+b+\frac{1}{2})t + a + b + c)e^t$,
$y = (at^2 + (b-a+\frac{1}{2})t + a + c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$,
$z = (-at^2 + (a-b-\frac{1}{2})t - c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

Exercice 13.

$y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Rightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t$.
Résolution par DSE $\Rightarrow x = a(1 + t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

Exercice 16.

Dériver deux fois. $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{2} + \lambda\,\mathrm{sh}\,x + \mu\cos x$.

Exercice 17.

1) $z' + \dfrac{z}{\mathrm{th}\,x} = 0$.

2) $y = \dfrac{ax+b}{\mathrm{sh}\,x}$.

Exercice 18.

1) spectre $= \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}$.

2) Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \Leftrightarrow f = af_\lambda + bf_{-\lambda}$.
Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = (at+b)e^{-t^2/2}$.

3) $\Phi^2(y) = -2y \Leftrightarrow y = e^{-t^2/2}\big(ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}\big)$.

Exercice 19.

1) $\lambda = n^2 : P(X) = aX^n$.

2) $\lambda > 0 : f(x) = \alpha x^{\sqrt{\lambda}} + \beta x^{-\sqrt{\lambda}}$.
$\lambda = 0 : f(x) = \alpha + \beta\ln x$.
$\lambda < 0 : f(x) = \alpha\cos\big(\sqrt{-\lambda}\ln x\big) + \beta\sin\big(\sqrt{-\lambda}\ln x\big)$.

3) $\lambda \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\exp\lambda\big(\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\big)$.

Exercice 20.

2) **a)** $\lambda = 2k$, $P = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$ pour $-n \leqslant k \leqslant n$.

b) $\lambda = 0$, $P = \alpha X^{2n}$.

c) $\lambda = 0$, $P = \alpha(X^2+1)^n$.

Exercice 21.

$y = \int_{t=0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{x} \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$. Continuité en 0 $\Rightarrow g(x) = \alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Exercice 22.

Étudier $e^{-A}(y-z)$, $A' = a$.

Exercice 23.

Point de concours : $\Big(x_0 - \dfrac{1}{a(x_0)}, -\dfrac{b(x_0)}{a(x_0)}\Big)$.

Exercice 25.

2) Soient y_0 une solution particulière et y_1 une solution non nulle de l'équation homogène : $y_1(x) = e^{-A(x)}$ avec $A' = a$. Alors $y_0(x+T) = y_0(x) + \alpha y_1(x)$, et pour une solution y quelconque, $y = y_0 + \lambda y_1$: $y(x+T) - y(x) = (\alpha + \lambda(e^{-I} - 1))y_1(x)$ où $I = \int_{t=0}^{T} a(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26.

$\lambda \neq 0$: $\quad f(x) = a\sin(\alpha x), \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$

$\lambda = 0$: $\quad f = 0$.

Exercice 27.

$f(1) = e^{-k}\int_{t=0}^{1} g(t)e^{kt}\,\mathrm{d}t$.

Avec Cauchy-Schwarz on obtient $\int_{t=0}^{1}(f'(t) + kf(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{2k}{1-e^{-2k}}f(1)^2 = 9\dfrac{2k}{1-e^{-2k}}$.

Il y a égalité pour $f(t) = 3\dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^k - e^{-k}}$.

Exercice 28.

1) $u_n - u(t_n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t} u'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ et on majore l'intégrale interne par Cauchy-Schwarz.

2) $w + w'' = u'$ donc $w(t) = \int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \alpha\cos t + \beta\sin t$ puis

$$\begin{aligned}\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x=t_n}^{t}\sin(t-x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t=x}^{t_n+2\pi}\sin(t-x)u'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} u'(x)(\cos(t_n - t) - 1)\,\mathrm{d}x \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et $\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,\mathrm{d}t = w(t_n) - w(t_n + 2\pi) = -\int_{x=t_n}^{t_n+2\pi}\sin(t-x)u'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 29.

1) Formule de Duhamel : $y(t) = -\int_{x=0}^{t} e^{t-x} f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda e^t$.
Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ donc toutes les solutions de (E) sont bornées au voisinage de $-\infty$.
Pour $t \geqslant 0$ on a $y(t) = e^t\Big(\lambda - \int_{x=0}^{t} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$ donc il y a au plus une valeur de λ telle que y soit éventuellement bornée au voisinage de $+\infty$, c'est $\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour ce choix on a : $|y(t)| = \Big|\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_{x=t}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2)

$$\begin{aligned}
\int_{t=a}^{b} |F(t)|\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_{t=a}^{b}\int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x}|f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x=a}^{b}\int_{t=a}^{x} e^{t-x}|f(x)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{x=b}^{+\infty}\int_{t=a}^{b} e^{t-x}|f(x)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{x=a}^{b} (1-e^{a-x})|f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x=b}^{+\infty} (e^{b-x}-e^{a-x})|f(x)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{x=-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

donc F est intégrable. $F' = F - f$ est aussi intégrable et $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 30.

Poser $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$ puis résoudre : $F(x) = x-1+G'(x)$, $G(x) = x-1+F'(x)$, $F(0) = G(0) = 0$.
On trouve $f(x) = g(x) = 1$.

Exercice 31.

1) thm de Cauchy-Lipschitz linéaire.
2) $x \mapsto A(-x)$ et $x \mapsto -B(-x)$ sont solutions de (E) et vérifient les bonnes conditions initiales.
3) Résoudre $u''(x) + ku(x) = 2d\cos(x)u(x)$ par la formule de Duhamel.

Exercice 32.

2) Oui, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.
3) Oui : si $g \in E$ alors $f = t \mapsto \int_{s=-\infty}^{t} e^{s-t} g(s)\,\mathrm{d}s$ appartient à E et $f + f' = g$.

Exercice 33.

2) $u_p(x) = -\int_{t=0}^{x} pf(t)\,\mathrm{sh}\Big(\dfrac{x-t}{p}\Big)\,\mathrm{d}t + \dfrac{\mathrm{sh}(x/p)}{\mathrm{sh}(1/p)} \int_{t=0}^{1} pf(t)\,\mathrm{sh}\Big(\dfrac{1-t}{p}\Big)\,\mathrm{d}t$.
3) TCD : $u_p(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{t=0}^{x}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_{t=0}^{1}(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} t(1-x)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=x}^{1} x(1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ (primitive deuxième de $-f$ s'annulant en 0 et 1).

Exercice 34.

1) Il suffit de démontrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont développables en série entière. La méthode des coefficients indéterminés donne $n(n-1)a_n = (\lambda-1)a_{n-4}$ si $n \geqslant 4$ et $a_2 = a_3 = 0$ d'où

$$a_{4k} = \frac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i-1)},\ a_{4k+1} = \frac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i+1)},\ a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0.$$

On obtient une série de rayon infini pour tout choix de a_0, a_1 donc les solutions DSE forment un ev de dimension 2 et on a ainsi trouvé toutes les solutions.

2) On doit avoir $H''(x) - 2xH'(x) + ((2-\lambda)x^2 - 1)H(x) = 0$. Si H est une fonction polynomiale non nulle, en examinant les termes de plus haut degré on obtient une contradiction. Donc il n'existe pas de telle solution.

Exercice 35.

Considérer $h(t) = a + \int_{u=0}^{t} f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t) \leqslant g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel.

Exercice 36.

$f(x) = \int_{t=0}^{x} g(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t + \lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $g = f + f''$.

Exercice 37.

On pose $\varphi(t) = f''(t) + f'(t) + f(t)$.

$f(t) = e^{-t/2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{u=0}^{t}\varphi(u)e^{u/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,(u-t)}{2}\right), \mathrm{d}u + A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,u}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,u}{2}\right)\right]$.

Exercice 39.

1) $y = \int_{t=\alpha}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t + y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A' = a$ et $A(\alpha) = 0$.
Comme $a \geqslant 1$, on a $A(x) \geqslant x - \alpha$ et $A(t) - A(x) \leqslant t - x$ pour $t \leqslant x$.
Donc $|y| \leqslant \int_{t=\alpha}^{z} |b(t)|e^{t-x}\,\mathrm{d}t + \int_{t=z}^{x} |b(t)|e^{t-x}\,\mathrm{d}t + |y(\alpha)|e^{\alpha-x} \leqslant \|b\|_\infty e^{z-x} + \sup_{[z,+\infty[} |b| + |y(\alpha)|e^{\alpha-x}$.
On choisit z tel que $z \to +\infty$ et $x - z \to +\infty \Rightarrow$ cqfd.

2) Comme $A(t) - A(x) \leqslant t - x$ pour $t \leqslant x$, l'intégrale $\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$. Comme $e^{-A(x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, c'est la seule.

Exercice 40.

1) Sinon, la convexité de y est incorrecte.

2) S'il existe x tel que $z(x) = z'(x) = 0$, alors $z = 0$ ce qui est absurde.
S'il existe x tel que $z(x) = 0 \neq z'(x)$, alors par convexité, z ne peut s'annuler ailleurs.

Exercice 42.

Si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées alors y_1'' et y_2'' sont intégrables donc $y_i'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $W_{y_1,y_2}(t) = 0$ pour tout t.

Exercice 43.

1) On suppose $y \neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé, donc la notion de zéros consécutifs est pertinente. Enfin, $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ sont de signes opposés sinon il existe un autre zéro dans $]x_0, x_1[$.

2) $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$ (non simplifiable).

3) Si z ne s'annule pas dans $]x_0, x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1) - W(x_0)$ si $z(x_0) \neq 0$ ou $z(x_1) \neq 0$.

4) On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0, x_1[$ et en permutant les rôles de u et y, le prochain zéro éventuel de u vient après y_1. Sinon, $u = \dfrac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Exercice 44.

2) a) Wronskien.

b) $(z/y)' = (z'y - zy')/y^2$ est de signe constant $\Rightarrow z/y$ est monotone.
z/y admet des limites infinies en u et v. TVI

Exercice 45.

$z' = -\dfrac{\lambda}{t^2}\sin(t-a)y(t)$ donc si y ne s'annule pas sur $]a, a+\pi[$, alors z est strictement monotone sur $[a, a+\pi]$. Mais $z(a+\pi) - z(a) = y(a+\pi) + y(a) \Rightarrow$ contradiction de signe.

Exercice 46.

1) L'ensemble des zéros est localement fini d'après Cauchy-Lipchitz.
Si y ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$, par exemple $y > 0$, alors y est concave positive donc minorée, donc $y'' \to -\infty$ ce qui implique $y', y \to -\infty$, contradiction.

3) Soit $b_n = \dfrac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Alors $b_{n+1} \leqslant 2\ln\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right) \leqslant b_n$ et $b_n \to 0$ donc $b_n \sim b_{n+1} \sim 2\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right)$.
Alors $\dfrac{1}{b_{n+1}} - \dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{2}$, $b_n \sim \dfrac{1}{2n}$ et $a_n \sim 2\ln n$.

Exercice 47.

Les formes linéaires $y \mapsto y(a)$ et $y \mapsto y(b)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des solutions de l'équation homogène.

Exercice 48.

On se ramène au cas $z = 0$. Soit x tel que $y(x) < 0$ et $y'(x) = 0$. Alors $y''(x) < 0$, donc y n'est pas minimale en x. Donc y n'a pas de minimum local sur $]a, +\infty[$.

Exercice 49.

Si $x_i(0) > 0$ pour tout i on obtient une contradiction en considérant le plus petit t tel qu'il existe i avec $x_i(t) < 0$.
Cas général : dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales…

Exercice 51.

$f'(x) = \dfrac{x+i}{2(x^2+1)}f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4}\exp\left(\dfrac{i}{2}\arctan x\right)$.

Exercice 52.

1) Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda\Delta f$ avec $\lambda > 0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

2) $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{t=a}^{b} f''(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{t=a}^{b} f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t$.

3) b) Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$.
Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε, et on a $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$ d'où

$$f_\lambda(x) = \int_{t=A}^{x} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda}\,)\varphi(t)\,dt + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}\,) + \beta\sin(x\sqrt{-\lambda}\,).$$

En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\Big(A + \dfrac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\Big) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda}\,)\varphi(t)\,dt$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.

Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f_\lambda'(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Exercice 53.

1) Après le prolongement indiqué on peut appliquer le relation de Parseval à f et f' sachant que $c_0(f) = 0$ par imparité et $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leqslant |c_n(f')|$ pour $n \neq 0$.

2) $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = \Big[xx'\Big]_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Rmq: il n'est pas nécessaire d'avoir q de classe $\mathcal{C}^1$.

3) Il existe x_0 de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation différentielle. Par différence avec x_0 on se ramène au cas $f = 0$ et il faut montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto \quad (x(0), x(\pi)) \end{cases}$ est bijective, en notant $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de l'équation homogène $x'' + qx = 0$. Or φ est linéaire et est injective d'après la question précédente, c'est donc une bijection car $\dim \mathcal{S} = 2$.

Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^1$ est inutile, continue suffit.

Exercice 54.

x et $1/x$ sont solution $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ donc une condition nécessaire est : $q(t) \leqslant 0$ et $q = -x'^2/x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Réciproquement, supposons q négative de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)x$ alors sur tout intervalle I où q ne s'annule pas on a $x'' = r(t)x' + r'(t)x$ donc

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

donc une deuxième condition nécessaire est : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Ces deux conditions sont suffisantes si q est strictement négative.

Exercice 55.

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^t A(u)X_k(u)\,\mathrm{d}u$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geqslant 0$.

Exercice 56.

Pour $n = 1$ et $A(t) = a > 0$ on trouve après les incantations usuelles (équation homogène, variation de la constante et mise en forme de l'intégrale) que $X\ :\ t \mapsto \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{a-1}\,\mathrm{d}u$ est l'unique solution prolongeable en 0 et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 1$ et A non constante, on trouve de même :

$$X(t) = \int_{u=0}^{1} F(tu)u^{A(0)-1}\exp\Big(\int_{v=t}^{tu} \frac{A(v)-A(0)}{v}\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u$$

et l'on voit que X est $\mathcal{C}^\infty$ en écrivant $\dfrac{A(v)-A(0)}{v} = \int_{w=0}^{1} A'(vw)\,\mathrm{d}w$.

Pour n quelconque et A constante : alors la fonction $X : t \mapsto \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}F(tu)\,\mathrm{d}u$ est l'unique solution prolongeable en 0, en convenant que $u^{A(0)-I} = \exp((A(0)-I)\ln(u))$ (l'intégrale converge en 0 car $u^{A(0)-I} = o(u^{\alpha-1}\ln(u)^n)$ pour tout $\alpha > 0$ minorant les parties réelles des valeurs propres de $A(0)$).

Pour A non constante, on met l'équation sous forme intégrale :

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t) \Leftrightarrow X(t) = \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\}\,\mathrm{d}u.$$

Soit $a > 0$ à choisir. Posons $E = \mathcal{C}([-a,a],\mathbb{C}^n)$ et pour $X \in E$:

$$\Phi(X) = t \mapsto \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\}\,\mathrm{d}u.$$

On a facilement : $\Phi(X) \in E$ si $X \in E$ et Φ est contractante sur E pour $\|\ \|_\infty$ si a est choisi suffisament petit. Donc l'équation $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$ admet une solution (unique) définie au voisinage de 0, et cette solution est prolongeable en une solution sur $\mathbb{R}$ car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en dehors de 0. Par ailleurs, on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ X(t) = \int_{u=0}^{1} u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\}\,\mathrm{d}u,$$

ce qui montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 57.

1) Poser $F(t)=\int_{u=t_0}^t f(u)\,\mathrm{d}u$ et résoudre l'inéquation différentielle $F'(t)\leqslant g(t)+kF(t)$ par la formule de Duhamel.

2)

$$\begin{aligned}
M'=AM &\Rightarrow \|M'(t)\|\leqslant K\|M(t)\|\\
&\Rightarrow \|M(t)-I\|\leqslant K\int_{u=t_0}^t \|M(u)\|\,\mathrm{d}u\\
&\Rightarrow \|M(t)\|\leqslant 1+K\int_{u=t_0}^t \|M(u)\|\,\mathrm{d}u\\
&\Rightarrow \|M(t)\|\leqslant 1+K\int_{u=t_0}^t e^{K(t-u)}\,\mathrm{d}u=e^{K(t-t_0)}.\\
(M-N)'=(A-B)M+B(M-N)&\\
&\Rightarrow \|(M-N)'(t)\|\leqslant \eta e^{K(t-t_0)}+(K+\eta)\|(M-N)(t)\|\\
&\Rightarrow \|(M-N)(t)\|\leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+(K+\eta)\int_{u=t_0}^t \|(M-N)(u)\|\,\mathrm{d}u\\
&\Rightarrow \|(M-N)(t)\|\leqslant \underbrace{\frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1)+\frac{(K+\eta)\eta}{K}\int_{u=t_0}^t e^{(K+\eta)(t-u)}(e^{K(u-t_0)}-1)\,\mathrm{d}u}_{=e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)}
\end{aligned}$$

3) $X_0(t)=M_0(t)\alpha$ et $Y_0(t)=N_0(t)\alpha$, d'où $\|X_0(t)-Y_0(t)\|\leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)\|\alpha\|$.

Exercice 58.

1) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t\mapsto \lambda e^{-t}$. La variation de la constante donne ensuite $f(t)=\lambda e^{-t}+e^{-t}\int_0^t e^u\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\Big|\int_0^t e^u\varphi(u)\,\mathrm{d}u\Big|\leqslant\Big(\int_0^t e^{2u}\,\mathrm{d}u\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t \varphi^2(u)\,\mathrm{d}u\Big)^{1/2}\leqslant e^t\Big(\int_0^{+\infty}\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u\Big)^{1/2}$$

On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) On a $f^2=f\varphi-ff'$, donc $\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u=\int_0^t f(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2}(f^2(t)-f^2(0))\leqslant\big|\int_0^t f(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\big|+\frac{1}{2}f^2(0)$. On a donc $\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u\leqslant\big(\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u\big)^{1/2}\big(\int_0^{+\infty}\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u\big)^{1/2}+\frac{1}{2}f^2(0)$. Si f est nulle alors elle est de carré intégrable. Sinon il existe t_0 tel que $\int_0^{t_0} f^2(u)\mathrm{d}u>0$. On a alors, pour tout $t\geqslant t_0$, $\big(\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u\big)^{1/2}\leqslant\big(\int_0^{+\infty}\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u\big)^{1/2}+\frac{1}{2}\frac{f^2(0)}{\big(\int_0^{t_0} f^2(u)\mathrm{d}u\big)^{1/2}}$. On en déduit que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

c) On a $\frac{1}{2}f^2(t)=\frac{1}{2}f^2(0)+\int_0^t f(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u$. f et φ sont de carré intégrable, on en déduit que $f\varphi$ est intégrable (utiliser par exemple $|f\varphi|\leqslant\frac{1}{2}(f^2+\varphi^2)$), on en déduit que $f^2(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$. Or f^2 est intégrable en $+\infty$, donc la limite de f^2 est nulle.

3) On a $\big|\int_0^t e^{u-t}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\big|\leqslant\int_0^t|\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$, on en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. f est bornée, φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a $\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{2}f^2(0)+\int_0^t|f(u)\varphi(u)|\,\mathrm{d}u$, ce qui montre que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$. La relation $\frac{1}{2}f^2(t)=\frac{1}{2}f^2(0)+\int_0^t f(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^t f^2(u)\mathrm{d}u$ permet à nouveau de conclure que $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 59.

$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_{t=0}^{x} \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$$y(x+2\pi) - y(x) = \int_{t=x}^{x+2\pi} \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\pi} \sin(t)(f(x+2\pi-t) - f(x+\pi-t))\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque f est croissante, on obtient $0 \leqslant y(x+2\pi) - y(x) \leqslant f(x+2\pi) - f(x)$ puis

$$0 \leqslant y(x+2k\pi) - y(x) \leqslant f(x+2k\pi) - f(x) \leqslant 2\|f\|_\infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $y(x)$ est compris entre $m - 2\|f\|_\infty$ et $M + 2\|f\|_\infty$ où m, M sont le minimum et le maximum de $y_{|[0,2\pi]}$. On traite de même le cas où f est décroissante. L'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^1$ n'a pas servi, il y a peut-être une solution plus simple ?

Exercice 60.

1) Il faut comprendre : continue sur $\mathbb{R}$, solution sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $1,+\infty[$, et non identiquement nulle.

En posant $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on obtient $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n(n+1) - k(k+1))a_n$, ce qui donne une famille de solutions sur $]-1,1[$ dépendant des deux paramètres a_0 et a_1. On a donc un ensemble de solutions sur $]-1,1[$ qui constitue un espace vectoriel de dimension 2 ; on les a toutes.

Comme k est entier, l'une des deux suites (a_{2p}) ou (a_{2p+1}) est presque nulle et la « demi-série » associée est en fait un polynôme solution de l'équation sur $]-1,1[$ donc solution partout.

Remarque : y_k est à un facteur près le k-ème polynôme de Legendre.

2) Soit z_k l'autre « demi-série », avec un coefficient a_0 ou a_1 non nul. Alors (y_k, z_k) est une base de l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$ donc toute fonction y solution sur $[-1,1]$ est combinaison linéaire de y_k, z_k sur $]-1,1[$. On doit prouver que le coefficient devant z_k est nul, ce qui revient à prouver que z_k n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 1 ou au voisinage de -1. Considérons le déterminant wronskien $w = \begin{vmatrix} y_k & z_k \\ y'_k & z'_k \end{vmatrix}$. On a $w' = \dfrac{2x}{1-x^2}w$, ce qui donne $w = \dfrac{w(0)}{1-x^2}$ avec $w(0) \neq 0$. Donc $|w| \xrightarrow[x\to\pm1]{} +\infty$ et c'est forcément la faute à z_k.

Exercice 61.

En écrivant $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, on obtient $a_0 = \lambda$ et $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ce qui définit une unique suite (a_k) et donc prouve l'unicité de a. Il reste à vérifier que le rayon de convergence est supérieur ou égal à R.

Soient $0 < r < s < R$ et M tel que $|b_k s^k| \leqslant M$ pour tout k. En supposant $|a_k r^k| \leqslant M'$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, il vient $|a_{n+1} r^{n+1}| \leqslant MM'rs/(n+1)(s-r) \leqslant M'$ pour n assez grand. On règle M' de sorte que l'inégalité soit vraie lorsque n est petit ; il y a un nombre fini de valeurs à considérer.

Exercice 62.

On pose $\varphi(t) = \|X(t)\|^2$. Alors $\varphi'(t) = 2(X'(t)|X(t)) = 2(AX(t)|X(t))$. On écrit $A = PD{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale et on a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tYDY$, avec $Y = {}^tPX$, ou encore ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. on en déduit que, pour tout t, $\varphi'(t) \geqslant 0$. Si A est antisymétrique alors, pour tout X, $(AX|X) = -{}^tXAX = -(AX|X)$, donc $(AX|X) = 0$. Dans ce cas φ est constante. On peut montrer également lorsque A est antisymétrique que chaque courbe intégrale est contenue dans un hyperplan.

Exercice 63.

1) $y'y + e^{-x}y'y'' = 0$ donc $y^2 + e^{-x}y'^2 + \int_{t=0}^{x} e^{-t}y'^2(t)\,dt = \text{cste}$.

2) La fonction nulle est une solution bornée sur $\mathbb{R}$. Soit y une solution bornée : $|y| \leqslant M$. Alors $|y''| \leqslant Me^x$ donc y'' est intégrable au voisinage de $-\infty$ puis y' admet une limite finie en $-\infty$ et cette limite est nulle sans quoi y ne serait pas bornée. Par intégration de $|y''| \leqslant Me^x$ il vient $|y'| \leqslant Me^x$ et ainsi $L(y) = \lim_{-\infty} y$ existe et est finie.

Supposons $L(y) = 0$: on a alors $|y| \leqslant Me^x$ par intégration de la même relation pour y', puis $|y''| \leqslant Me^{2x}$, d'où après deux intégrations, $|y| \leqslant \frac{1}{4}Me^{2x}$ et de proche en proche : $|y| \leqslant \frac{1}{n!^2}e^{nx}$ pour tous n et x. Ainsi, la relation $L(y) = 0$ implique $y = 0$.

Considérons alors l'ev E des solutions bornées : L est une forme linéaire injective sur cet ev d'où $\dim E \leqslant 1$. Comme l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est un ev de dimension 2, il existe des solutions non bornées.

Exercice 64.

La solution générale de $y' - y = e^{-x^2}$ est donnée par

$$y = \int_{t=0}^{x} e^{x-t}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \lambda e^x = e^x\Big(\lambda + \int_{t=0}^{x} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t\Big).$$

Comme $\int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}-(t+\frac{1}{2})^2}\,dt$ est absolument convergente, toute solution tend vers 0 en $-\infty$. De plus,

$$y = e^x\Big(\underbrace{\lambda + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t}_{\text{cste}} - \underbrace{\int_{t=x}^{+\infty} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{o}(1)}\Big)$$

et $0 \leqslant e^x \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc y tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si

$$\lambda = -\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 65.

1) y étant bornée, $y'' = -\dfrac{xy}{1+x^3}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc y' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. On montre classiquement qu'alors $y/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ d'où $\ell = 0$ puisque y est bornée.

2) Si (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions alors $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ est constant et non nul. Ceci empêche que y_1 et y_2 soient toutes les deux bornées.

Exercice 66.

1) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^x + Be^{-x}$. La méthode de variations des constantes donne $\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^{-x} = 0 \\ A'(x)e^x - B'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$, puis $A'(x) = \frac{e^{-x}}{2(1+x^2)}$ et $B'(x) = \frac{-e^x}{2(1+x^2)}$. Ainsi les solutions sont les fonctions $f(x) = e^x(A + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t) + e^{-x}(B - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t)$.

2) Pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant e^x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi e^x}{2}$. On en déduit que la fonction $e^{-x}(B - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Pour avoir f bornée sur $\mathbb{R}^+$ il faut que $A + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. On a donc $f(x) = e^x(-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t) + e^{-x}(B - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t)$. On montre de même que pour avoir f bornée sur $\mathbb{R}^-$ il faut que $B = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Finalement la seule fonction possible est $f(x) = -\frac{e^x}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour tout x, $0 \leqslant \frac{e^x}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Pour tout x, $\frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}$. On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}$.