Équations différentielles non linéaires

Exercice 1. *Équations à variables séparables*

1) $y' = y(1+y)$.
2) $y' = \sin x \cos y$.
3) $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
4) $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
5) $y' = \sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Exercice 2. *Équations homogènes*

1) $y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.
2) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.
3) $(x^2+y^2)y' = 2xy$.
4) $(x+y)y' = 2x - y$.

Exercice 3. *Équations de Bernouilli*

1) $xy' + y = xy^3$.
2) $2xy' + y = \dfrac{2x^2}{y^3}$.
3) $\sqrt{x}y' - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.
4) $xy' + y = (xy)^{3/2}$.
5) $x^3y' = y(3x^2+y^2)$.

Exercice 4. *Équations de Riccati*

1) $x^2(y'+y^2) = xy - 1$.

Exercice 5. *Divers ordre 1*

1) $(x^2-y^2-1)y' = 2xy$: poser $z = \dfrac{y}{x^2+y^2-1}$.

Exercice 6. *Centrale MP 2004*

Soit $n > 0$ et $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \dfrac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$

1) Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver une autre solution présentant une symétrie avec γ. Peut-on avoir comme solution $\sigma(t) = \lambda\gamma(\mu t)$? En déduire une propriété géométriques des solutions maximales de (S).
2) Déterminer les courbes du plan formées des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy). En déduire quelques solutions particulières.
3) A supposer qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$, déterminer Φ et en déduire toutes les courbes intégrales.

Exercice 7. *Chimie P 91*

Résoudre numériquement le système $\begin{cases} y' = -y \\ z' = y - z \\ y(0) = 1 \text{ et } z(0) = 0. \end{cases}$ Prendre $h = 0.1$ et faire un tableau avec 10 valeurs. Faire la résolution analytique.

Exercice 8. *Équations d'ordre 2*

1) $y'' = \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
2) $2(2a-y)y'' = y'^2$.
3) $yy'' = y'^2 - y^2$: poser $z = y'/y$.

Exercice 9. *Centrale MP 2000*

Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Que peut-on dire de l'équation : $y'^2 = 4y$?

Exercice 10. *Étude qualitative : $y' = x^3 + y^3$*

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a \geqslant 0$, et $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition. Montrer que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$, que β est fini, et que $y \underset{x\to\beta^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 11. *Étude qualitative : $y' = x - e^y$*

Soit y une solution maximale de l'équation $y' = x - e^y$.

1) Montrer que y est décroissante puis croissante.

2) Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.

3) Montrer que $\alpha > -\infty$ et que $y \underset{x\to\alpha^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 12. *Étude qualitative : $x' = \cos(t) + \cos(x)$*

Soit x la solution maximale du problème de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in]0, \pi[$.
Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$.

Exercice 13. *X MP* 2000*

On considère l'équation différentielle $y' = \sin(x+y)$. Montrer que pour toute condition initiale l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$. Ensemble des points d'inflexion des courbes solutions ?

Exercice 14. *Étude qualitative : $x' = x^2 - t$, ENS Cachan MP* 2005*

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t, x) \text{ tq } x^2 - t < 0\}$.
Montrer que si x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$, alors x est définie sur $[t_0, +\infty[$ et la courbe intégrale reste dans D_0. En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Exercice 15. *Intervalle maximal pour $y' = f(y)$*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive et y la solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$ du problème de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Montrer que $\beta = x_0 + \int_{t=y_0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ et que $y \underset{x\to\beta^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 16. *Étude qualitative de $y' = 2ty + y^2$*

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2$, $y(t_0) = y_0$. Soit y une solution maximale.

1) Montrer que $y = 0$ ou bien y ne s'annulle pas.

2) On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de y.

a) Montrer que si $y_0 \geqslant -2t_0$, alors y est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.

b) Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, y et y' seraient bornées sur $]t_1, t_0]$).

c) Donner l'allure générale de la courbe de y.

3) Résoudre l'équation en posant $z(t) = \dfrac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

Exercice 17. *Équation admettant simultanément t et $\sin t$ comme solution*

Existe-t-il une fonction $f : (y, t) \to f(y, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation : $y^{(n)} = f(y, t)$ admette les deux solutions $y(t) = t$ et $y(t) = \sin t$ sur $\mathbb{R}$?
Même question avec l'équation $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y, t)$.

Exercice 18. *$y'' = F(x, y)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$*

Soit $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, l'application $y \mapsto F(x, y)$ est strictement croissante. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe au plus une solution à l'équation : $y'' = F(x, y)$ avec les conditions aux limites $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Exercice 19. *Comparaison d'équations*

Soient y, z solutions de $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ z' = g(z,t) \\ y(0) = z(0) \end{cases}$ où f,g sont deux fonctions localement lipschitziennes telles que :

$$\begin{cases} \forall\, u,t,\ \ f(u,t) \leqslant g(u,t) \\ \forall\, u,v,t,\ \ u \leqslant v \Rightarrow f(u,t) \leqslant f(v,t). \end{cases}$$

1) Pour $\varepsilon > 0$, on note z_ε la solution de $\begin{cases} z_\varepsilon' = g(z_\varepsilon,t) + \varepsilon \\ z_\varepsilon(0) = y(0). \end{cases}$

Montrer que $z_\varepsilon \geqslant y$ (sur leur domaine commun de définition).

2) Démontrer que $z_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} z$ uniformément sur tout intervalle borné. Conclusion ?

Exercice 20. *Étude de l'équation* $\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha \geqslant 0. \end{cases}$

Soit y la solution maximale. On a l'intégrale première : $\dfrac{y'^2}{2} - \cos y = C = \dfrac{\alpha^2}{2} - 1.$

1) **a)** Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que y est impaire.

2) On suppose ici que $C > 1$.

a) Montrer qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $y(T) = 2\pi$.

b) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = y(t) + 2\pi$.

3) On suppose ici que $-1 < C < 1$: On pose $C = -\cos\theta$, $0 < \theta < \pi$, et $F(x) = \int_{u=0}^{x} \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}$.

a) Soit a maximal tel que $y'(t) > 0$ sur $[0, a[$. Montrer que $y(a) = \theta$ et $F(\theta) = a$.

b) Montrer que y est $4a$-périodique.

4) Étudier les cas $C = 1$, $C = -1$.

Exercice 21. *Résolution approchée de $y' = f(y,t)$, $y(a) = y_0$ sur $[a,b]$ par la méthode d'Euler*

On suppose que f est bornée par M et $|f(y,s) - f(z,t)| \leqslant K(|y-z| + |s-t|)$. On divise $[a,b]$ en n intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on approche la solution y par la fonction z, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0) = y_0 \\ \text{sur }]a_k, a_{k+1}[,\ \ z' = f(z(a_k), a_k). \end{cases}$$

1) Soit $\varepsilon_k = |z(a_k) - y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\, t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|y(t) - z(t)| \leqslant kh^2(M+1) + (1+Kh)\varepsilon_k$ $\left(h = \dfrac{b-a}{n}\right)$.

2) En déduire que $\sup |y - z| \leqslant (M+1)(e^{K(b-a)} - 1)\dfrac{b-a}{n}$.

Exercice 22. *Lyon MP* 2000*

1) Soit f une application minorée et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) telle que la suite $(f'(a_n))$ tende vers 0.

2) Soit f une application minorée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de $\mathbb{R}^p$ telle que la suite $(\mathrm{d}f(a_n))$ tende vers 0, c'est à dire $\nabla f(a_n)$ tend vers 0.

Exercice 23. *ENS MP* 2001*

Soit un vecteur $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Montrer qu'il existe une unique fonction $u = (u_1, u_2, u_3)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3)$ et $u(0) = v$.
Indication : étudier la fonction $p \mapsto p + u \wedge p$ avant de pouvoir évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 24. *Centrale MP 2001*

On définit une suite de fonctions sur $[0,1]$ de la manière suivante : f_0 est la fonction constante 1 et pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = 1 + \int_{t=0}^{x} f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$.

1) En étudiant $f_{n+1} - f_n$ montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Que valent $f'(0)$ et $f'(1)$?

3) Étudier la concavité de f.

4) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $1 + x \leqslant f(x) \leqslant \exp(x)$.

Exercice 25. *ENS MP 2002*

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et a, b des réels tels que $a < b$. On suppose que f est T-périodique par rapport à t et que l'on a : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $f(t,a) > 0$ et $f(t,b) < 0$.

1) Que peut-on dire des solutions du problème de Cauchy E_y : $(x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = y \in [a,b])$?

2) Montrer que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $[a,b]$.

3) Montrer qu'il existe une solution de E_y qui est T-périodique.

Exercice 26. *X MP* 2005*

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il existe a, b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tous t, y : $(f(t,y) \mid y) \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t)$. Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t,y)$ est définie sur J entier.

Exercice 27. *Système autonome, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006*

On considère le système différentiel : $(V) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1). \end{cases}$ dont on cherche les solutions (x,y) définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

1) Trouver une fonction $f \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^{+*})^2, \mathbb{R})$ telle que pour toute solution (x,y) de V, $f(x,y)$ soit constante.

2) Montrer que les solutions de (V) sont périodiques.

solutions

Exercice 1.

1) $y = -1 + \dfrac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.

2) $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x}) - \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

3) $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.

4) $y = -\ln\bigl(1 - x(1-1/e)\bigr)$.

5) $y = \left(\lambda + \dfrac{x}{2}\right)\left|\lambda + \dfrac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

Exercice 2.

1) $y = \dfrac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda > 0$.

2) $y = -x \pm \sqrt{2x^2-\lambda}$ ou $y = x(-1\pm\sqrt{2})$.

3) $y = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ ou $y = \pm x$ ou $y = 0$.

4) $y = -x \pm \sqrt{\lambda + 3x^2}$ et $y = x(-1\pm\sqrt{3})$.

Exercice 3.

1) $y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ ou $y = 0$.

2) $y = \pm\sqrt[4]{x^2 + \dfrac{\lambda}{x^2}}$.

3) $y = ((\sqrt{x}+2)^2 + \lambda e^{\sqrt{x}})^2$.

4) $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{\lambda - x}\right)^2$ ou $y = 0$.

5) $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}\,x^3}{\sqrt{2\lambda - x^4}}$ ou $y = 0$.

Exercice 4.

1) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5.

1) $y = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1 - x^2}$ ou $y = 0$.

Exercice 6.

1) $\gamma_1(t) = (-x(t), y(t))$ et $\gamma_2(t) = (x(-t), -y(-t))$ sont aussi solutions de (S).

Par ailleurs, la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique, en particulier s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t. De même s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$ pour tout t.

Pour λ, μ non nuls et x ne s'annulant pas, $t \mapsto (\lambda x(\mu t), \lambda y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu = \lambda$.

L'ensemble des trajectoires maximales est donc stable par les symétries par rapport aux deux axes et par les homothéties de centre $(0,0)$. De plus toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport à cet axe.

2) $x'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = 0$ ou $y(t_0) = 0$. Dans le premier cas on a $x(t) = 0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire (solution de $y' = y^2$). Dans le second cas $x(t_0)$ est arbitraire (Cauchy-Lipschitz) donc l'ensemble des points à tangente verticale est la réunion des deux axes privé de $(0,0)$ (où il n'y a pas de tangente).

$y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = \pm y(t_0)$, quantité arbitraire, donc l'ensemble des points à tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0,0)$.

Solutions particulières : $x(t) = 0, y(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$.

3) En supposant $\varPhi$ de classe $\mathcal{C}^1$ on obtient l'équation $\dfrac{2}{n}x\varPhi\varPhi' = \varPhi^2 - x^2$ soit $\dfrac{2}{n}x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \varPhi^2$.

On obtient $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \dfrac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.

Une courbe intégrale (en fait une trajectoire) qui ne touche aucun des deux axes vérifie l'hypothèse $y =$ fonction de x car x' ne peut s'annuler donc x est une fonction injective de t. Une trajectoire qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe (déjà vu) et une trajectoire qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$ le traverse ($y' \neq 0$), donc est réunion de sous-arcs localement d'un seul côté de l'axe des x, de la forme $y = \varPhi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}$.

Exercice 7.

Méthode d'Euler

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.000	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.348
z	0.000	0.100	0.180	0.243	0.292	0.328	0.354	0.372	0.383	0.387	0.387

Solution théorique : $y = e^{-x}$, $z = xe^{-x}$.

Exercice 8.

1) $y = 4\arctan((\sqrt{2} - 1)e^x)$.

2) $y = 2a - (\lambda x + \mu)^{2/3}$.

3) $y = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)$.

Exercice 10.

Si $a > 0$, $y'(0) = a^3$, si $a = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 6$. Donc y est croissante au voisinage de 0. Si $y' > 0$ sur $]0,\gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et $y' > 0$ sur $[\gamma, \gamma + \varepsilon[$ donc, par connexité, $y' > 0$ sur $]0, \beta[$.

$y' \geqslant y^3 \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{y'}{y^3} \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2a^2} - \dfrac{1}{2y^2} \leqslant \dfrac{1}{2a^2}$.

Exercice 11.

1) Régionnement.

2) idem.

3) Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Rightarrow -y'e^{-y} > 1 \Rightarrow x > e^{-y} + C > C$.

Exercice 13.

y' étant bornée, y admet une limite finie en tout point fini donc la solution non prolongeable est définie sur $\mathbb{R}$.

Une solution y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ vu l'équation et $y'' = (1+\sin(x+y))\cos(x+y)$ est du signe de $\cos(x+y)$. En un point (x_0, y_0) tel que $x_0 + y_0 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ on a $y'' = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+y) \neq 0$ donc y'' change de signe et il y a inflexion. En un point (x_0, y_0) tel que $x_0 + y_0 \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$ on a $x + y =$cste (car $y = \text{cste} - x$ est solution et il y a unicité) donc il n'y a pas inflexion.

Exercice 14.

Supposons $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geqslant 0$. On peut alors poser $t_1 = \min\{t > t_0 \mid x^2(t) - t > 0\}$. On a alors $x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$. On a $y'(t_1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Cela contredit le fait que, pour tout $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) < 0$. De même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, on étudie la fonction $z(t) = x(t) + \sqrt{t}$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent la courbe intégrale reste dans D_0. Si la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $-\beta \leqslant x'(t) \leqslant 0$. On en déduit que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$ et donc que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β. On prolonge la fonction en β et la fonction prolongée vérifie (E) sur $[t_0, \beta]$ ce qui est impossible. On en déduit que $\beta = +\infty$. On a, pour tout $t \geqslant t_0$, $x'(t) < 0$, donc x est décroissante. Si $x(t)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors $x'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -t$, ce qui est impossible. Par conséquent $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. En particulier, pour t assez grand, $x(t) \leqslant 0$. En dérivant (E) on a $x''(t) = 2x(t)(x^2(t) - t) - 1$. Si, à partir d'un certain rang, pour tout t, $x''(t) \geqslant 0$ alors x' est croissante et majorée. Elle ne peut tendre que vers 0 car sinon $x'(t) \sim \ell$, puis $x(t) \sim \ell t$ et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$. Sinon il existe t_1 tel que $x''(t_1) < 0$. S'il existe $t_2 > t_1$ tel que $x''(t_2) = 0$ (avec t_2 minimal) alors $x'''(t_2) = 2x + \dfrac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand. Ceci est impossible et donc dans ce cas $x''(t)$ reste négatif lorsque t tend vers $+\infty$, on a alors $0 < t - x^2(t) \leqslant \dfrac{-1}{2x(t)}$. Par conséquent $x^2(t) - t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Exercice 18.

Soient y, z deux solutions distinctes. D'après Cauchy-Lipschitz, $y'(a) \neq z'(a)$, donc par exemple $y'(a) > z'(a)$. Soit $c > a$ maximal tel que : $\forall x \in]a, c[$, $y(x) > z(x)$. Donc $y - z$ est strictement positive convexe sur $[a, c]$, et s'annule en a et c, ce qui est impossible.

Exercice 22.

1) Sinon $d(0, f'(\mathbb{R})) > 0$ et f ne peut pas être minorée.

2) Supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ on a $\nabla f(a) \neq 0$.

On considère l'équation différentielle autonome : $x' = \dfrac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Pour $x(0)$ donné il existe une solution maximale, et elle est définie sur $\mathbb{R}$ car x' est bornée. Alors la fonction : $t \mapsto f(x(t))$ est $\mathcal{C}^1$ minorée sur $\mathbb{R}$ donc il esiste une suite de réels (t_n) telle que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 23.

$f_u : p \mapsto p + u \wedge p$ est linéaire injective car $f_u(p) = 0 \Rightarrow p \perp p$, donc bijective. L'application $u \mapsto f_u$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc il en est de même de l'application inverse : $u \mapsto (f_u)^{-1}$ et l'équation différentielle donnée équivaut à $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ qui relève de la théorie de Cauchy-Lipschitz : il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I. D'après l'équation différentielle, $(u' \mid u) = 0$ d'où $\|u\|$ est constant. Alors $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ est borné, donc u admet une limite finie en tout point fini par uniforme continuité, ceci prouve que $I = \mathbb{R}$.

Exercice 24.

1) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\int_{t=0}^{x}(f_n-f_{n-1})(t-t^2)\,\mathrm{d}t$ donc par récurrence $f_{n+1}-f_n\geqslant 0$.
De plus $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant x\|f_n-f_{n-1}\|_\infty$ d'où $f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\leqslant \|f_n-f_{n-1}\|_\infty\int_{t=0}^{x}(t-t^2)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{6}\|f_n-f_{n-1}\|_\infty$ et $\|f_{n+2}-f_{n+1}\|_\infty\leqslant\frac{1}{6}\|f_n-f_{n-1}\|_\infty$ ce qui prouve que la série télescopique $\sum(f_{n+1}-f_n)$ est normalement convergente.

2) Par passage à la limite uniforme sous le signe intégral on a $f(x)=1+\int_{t=0}^{x}f(t-t^2)\,\mathrm{d}t$ d'où f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x)=f(x-x^2)$ ce qui entraine le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f par récurrence. $f'(0)=f'(1)=f(0)=1$.

3) f' est positive d'après l'équation différentielle vérifiée par f et $f''(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$ est du signe de $1-2x$, c'est-à-dire que f est convexe sur $[0,\frac{1}{2}]$ et concave sur $[\frac{1}{2},1]$.

4) $1+x=f_1(x)\leqslant f(x)=f_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$. De plus, $f'(x)=f(x-x^2)\leqslant f(x)$ d'où $x\mapsto f(x)e^{-x}$ est décroissante et vaut 1 en 0 ce qui prouve que $f(x)\leqslant e^x$.

Exercice 25.

1) Qu'il en existe et qu'il y en a une unique maximale, son intervalle de définition est ouvert.

2) Soit $(]\alpha,\beta[,x)$ une solution maximale. Si $t_0\in]\alpha,\beta[$ est tel que $x(t_0)=a$ alors $x'(t_0)>0$ donc $x(t)-a$ est du signe de $t-t_0$ au voisinage de t_0. Ceci montre que t_0 (éventuel) est unique, et en particulier $t_0<0$. De même, il existe au plus un réel t_1 tel que $x(t_1)=b$ et $t_1<0$. Par ailleurs l'existence de l'un des deux réels t_0 ou t_1 exclut l'autre. Enfin, $a\leqslant x(t)\leqslant b$ pour tout $t\in[0,\beta[$ donc d'après le théorème des bouts on a $\beta=+\infty$.

3) Soit $\varphi:\begin{cases}[a,b]&\longrightarrow\quad[a,b]\\ \quad y&\longmapsto\quad x(T).\end{cases}$ Comme deux courbes intégrales maximales distinctes n'ont aucun point commun, φ est injective et par disjonction de cas on montre que φ est strictement croissante et satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires. En particulier φ est continue et $\varphi(y)-y$ prend une valeur positive en a, négative en b donc s'annule pour un certain $y\in[a,b]$. Pour cet y, la solution correspondante est T-périodique.

Exercice 26.

Remarque : la seule continuité de f implique l'existence d'une solution maximale à condition initiale donnée (thm. de Cauchy-Arzela, HP), mais pas son unicité.

thm des bouts : supposons y solution, définie sur $[t_0,\alpha[$ avec $\alpha<\sup J$.
On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|y\|^2)=2(y'\mid y)=2(f(t,y)\mid y)\leqslant 2a\|y\|^2+2b$, ce que l'on écrit $z'=2az+2b-c$ avec $z=\|y\|^2$ et c fonction continue positive. Donc $z(t)=\exp(2A(t)-2A(t_0))z(t_0)+\int_{s=t_0}^{t}\exp(2A(t)-2A(s))(2b(s)-c(s))\,\mathrm{d}s$ où A est une primitive de a sur J. On en déduit que z est majorée sur $[t_0,\alpha[$ car A et b sont continues sur $[t_0,\alpha]$ et $c\geqslant 0$, donc $\|y'\|=\|f(t,y)\|$ est aussi majorée, et $\int_{s=t_0}^{\alpha}y'(s)\mathrm{d}s$ est absolument convergente. Ainsi y admet une limite finie en α^-, et l'on peut prolonger y au dela de α avec le thm de Cauchy-Arzela ; y n'est pas maximale.

Exercice 27.

1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,y) = x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}$ donc f convient si $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(y-1)$ (condition suffisante). Il n'existe pas de telle fonction (thm. de Schwarz), mais on peut accepter f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)y(x-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)x(y-1)$ où λ est une fonction bien choisie (appelée *facteur intégrant*). On voit immédiatement que $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy}$ convient, d'où $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$.

2) D'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz, s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t, et de même pour y. Ainsi, si on fixe une condition initiale $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t. De plus, par le même raisonnement, si $(x(0), y(0)) \neq (1,1)$ alors $(x(t), y(t)) \neq (1,1)$ pour tout t. Désormais on suppose ces conditions satisfaites. Soit $k = f(x(0), y(0)) = x(0) + y(0) - \ln(x(0)y(0))$. Par étude de fonction, on voit que $k \neq 2$ et la courbe C_k d'équation $f(x,y) = k$ est une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ entourant le point $(1,1)$. Le point $M_t = (x(t), y(t))$ se déplace sur C_k avec une vitesse numérique $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \sqrt{x^2(1-y)^2 + y^2(x-1)^2} \geqslant \alpha_k > 0$ où α_k ne dépend que de k. On en déduit qu'une abscisse curviligne de M_t décrit $\mathbb{R}$ quand t décrit $\mathbb{R}$. En particulier il existe $t_0 > 0$ tel que $s(t_0) - s(0) = \text{longueur}(C_k)$ ce qui implique $M_{t_0} = M_0$ et le mouvement est t_0-périodique.