Dérivées partielles

Calcul

Exercice 1. *Calcul de dérivées partielles*
Calculer les dérivées partielles des fonctions :
1) $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$
2) $f(x,y) = \min(x,y^2)$
3) $f(x,y) = \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = g'(x)$.

Exercice 2. *DL d'ordre 1*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$f(0,1,1) = 0$, $\partial f/\partial x(0,1,1) = 1$, $\partial f/\partial y(0,1,1) = 2$, $\partial f/\partial z(0,1,1) = 3$.
Peut-on déterminer $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)}$?

Exercice 3. *Simplification*
Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.
1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3) Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 4. *Somme des angles d'un triangle*
Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\Big(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\Big) + \arccos\Big(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\Big) + \arccos\Big(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\Big)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x, y, z sont strictement positifs.

Exercice 5. *Intégrale fonction de paramètres*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto \quad \int_{t=0}^1 f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_n t^n)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 6. *Dérivées secondes composées*
Soient $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Exercice 7. *Les polynômes complexes sont harmoniques*
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto \quad P(x+iy). \end{cases}$ Montrer que $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0$.

Exercice 8. *Laplacien en polaires*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$ (laplacien de f).
1) Calculer $\partial g/\partial\rho$, $\partial g/\partial\theta$, $\partial^2 g/\partial\rho^2$, $\partial^2 g/\partial\theta^2$ en fonction des dérivées partielles de f.
2) Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Exercice 9. *Laplacien en sphériques*

Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $\Phi:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (x,y,z)\end{cases}$ avec $\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi,\end{cases}$ et $F=f\circ\Phi$.

Vérifier que :

$$(\Delta f)\circ\Phi=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}-\frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}.$$

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.

Exercice 10. *Laplacien en dimension n*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application F de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x_1,\dots,x_n)=f(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})$.
Calculer le laplacien de F en fonction de f.

Exercice 11. *Les isométries conservent le laplacien*

Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\|\ \|_2$.

1) Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.

2) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $(\Delta f)\circ\varphi=\Delta(f\circ\varphi)$.

Exercice 12. *Changement de variables affine*

Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une application affine.

1) Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.

2) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $A\in\mathbb{R}^2$, on note $H_f(A)=\begin{bmatrix}\partial^2f/\partial x^2(A) & \partial^2f/\partial y\partial x(A)\\ \partial^2f/\partial x\partial y(A) & \partial^2f/\partial y^2(A)\end{bmatrix}$ (*matrice Hessienne de f*). Montrer que : $\forall A\in\mathbb{R}^2,\ H_{f\circ\varphi}(A)={}^tJH_f(\varphi(A))J$.

Exercice 13. *Formule de Leibniz*

Soient $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Calculer $\dfrac{\partial^n(fg)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$ en fonction des dérivées de f et g.

Exercice 14. *DL d'ordre 2*

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Démontrer que :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\right)(a,b)+o(h^2+k^2).$$

Exercice 15. *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées :

$$\forall i,j,\ \forall A\in U,\ \left|\partial^2f/\partial x_i\partial x_j(A)\right|\leqslant M.$$

1) Montrer que : $\forall A,B\in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_A(\overrightarrow{AB})\right|\leqslant\dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}$.

2) Montrer que : $\forall A,B\in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_C(\overrightarrow{AB})\right|\leqslant\dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A,B]$.

Exercice 16. *Longueur d'un arc de courbe*

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont les dérivées partielles sont bornées sur U et $I\ni t\mapsto M_t$ une courbe paramétrée dans U de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $a,b\in I$ comparer les longueurs des arcs $\overset{\frown}{M_aM_b}$ et $\overset{\frown}{f(M_a)f(M_b)}$.

Exercice 17. *Mise en facteur de x et y*

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0,0) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $g, h : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$

2) Y a-t-il unicité de g et h ?

3) Généraliser au cas où U n'est pas convexe.

Exercice 18. *Fonctions convexes*

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1) On suppose que f est convexe.

a) Soient $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$ tel que $x - h \in U$ et $x + h \in U$. Montrer :

$$(1+t)f(x) - tf(x-h) \leqslant f(x+th) \leqslant (1-t)f(x) + tf(x+h).$$

b) Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n = 2$ puis généraliser).

2) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $(x,y) \in U$ on a : $f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f_x(y-x)$.
Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n = 2$.

3) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$ la forme bilinéaire symétrique d^2f_x est positive.

b) Si, pour tout $x \in U$, d^2f_x est définie positive, montrer que f est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 19. *Caractérisation des isométries*

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer que f est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante (c'est-à-dire $\mathrm{d}f_x = \mathrm{d}f_y$ pour tous x, y, égalité dans $\mathcal{L}(E)$).

2) Soit X un ensemble non vide quelconque et $\varphi : X^3 \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\forall x, y, z \in X,\ \varphi(x,y,z) = \varphi(y,x,z) = -\varphi(z,y,x).$$

Montrer que $\varphi = 0$ (lemme des tresses).

3) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}f_x$ est une application orthogonale.

Exercice 20. *Différentiabilité de la norme*

Pour chacune des trois normes classiques sur $\mathbb{R}^2$ dire en quels points elles sont différentiables.

Exercice 21. *Partiellement dérivable $\Rightarrow$ continue ?*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Donner un exemple de fonction $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières, mais discontinue en au moins un point.

2) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ ayant en tout point des dérivées partielles premières *bornées* sur U. Montrer que f est continue.

Exercice 22. *Mines MP 2001*
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité du plan, telle que son laplacien $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$ soit nul.
1) Montrer $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ne dépend pas de $r \in [0,1]$.
2) Calculer alors $\iint_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

Exercice 23. *ENS MP 2002*
Soit n un entier > 0, $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f(x)/\|x\| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et qu'en tout point la matrice hessienne de f est définie positive.
On pose $g(y) = \sup\{(x \mid y) - f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Étudier les propriétés de g.

Exercice 24. *$\int \varphi \circ f$, X MP* 2004*
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On y définit une norme par : $\|f\| = \sqrt{\int_{t=0}^{1} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que φ'' est bornée.
Pour $f \in E$ on pose $T(f) = \int_{t=0}^{1} \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t$.
1) Montrer que l'application ainsi définie $T : E \to \mathbb{R}$ est continue.
2) Montrer que T est différentiable en tout point.

Thm de Schwarz et formes différentielles

Exercice 25. *Contre-exemple au théorème de Schwarz*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$. On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\partial g/\partial x(0,y)$ et $\partial g/\partial y(x,0)$ en fonction de f. En déduire les valeurs de $\partial^2 g/\partial y\partial x(0,0)$ et $\partial^2 g/\partial x\partial y(0,0)$. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Exercice 26. *Contre-exemple au théorème de Schwarz (Centrale MP 2003)*
Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.
1) Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $\partial^2 f/\partial x\partial y(0,0) \neq \partial^2 f/\partial y\partial x(0,0)$.

Exercice 27. *Dérivées d'ordre k distinctes*
Trouver $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que les $k+1$ dérivées d'ordre k en $(0,0)$ soient distinctes.

Exercice 28. *Intégration de formes différentielles*
Déterminer les fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
1) $\partial f/\partial x = \dfrac{2+x}{y}$, $\partial f/\partial y = \dfrac{2+y}{x}$.
2) $\partial f/\partial x = \dfrac{1-y}{(x+y+1)^2}$, $\partial f/\partial y = \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2}$.
3) $\partial f/\partial x = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, $\partial f/\partial y = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$.
4) $\partial f/\partial x = 2x + \dfrac{1}{y}$, $\partial f/\partial y = 2y - \dfrac{x}{y^2}$.

Exercice 29. *Formes différentielles exactes*
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la forme différentielle $\omega = f(y)(xe^y\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Exercice 30.
Quelles sont les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}(x^2+y^2)$ soit exacte ?

Exercice 31.

Trouver les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la forme différentielle :
$\omega = 2xz\,\mathrm{d}x + f(y)g(z)\,\mathrm{d}y + \left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}z$ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

Exercice 32. *Équation associée à une différentielle exacte*

1) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
$\partial f/\partial x(x,y) = \dfrac{\ln x + y - 1}{x^2 y}$ et $\partial f/\partial y(x,y) = \dfrac{\ln x}{xy^2}$.

2) Application : Résoudre l'équation différentielle : $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Difféomorphismes et fonctions implicites

Exercice 33. *Jacobien des fonctions symétriques*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \end{cases}$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \dots, x_n$. Calculer le déterminant jacobien de f.

Exercice 34. *Changement de variables*

On pose $f(x,y) = (x+y, xy) = (u,v)$. Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

Exercice 35. *Changement de variables*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto \quad (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y). \end{cases}$ Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Exercice 36. *Mines MP 2010*

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$ et f la fonction définie par $f(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$.

1) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

2) Déterminer $f(U)$.

Exercice 37. *Application du thm des fonctions implicites*

On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0,0)$.

Exercice 38. *Thm des fonctions implicites*

1) Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.

2) Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 39. *Thm des fonctions implicites, Ensi P 91*

Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 40. *Équation implicite $x \ln x = y \ln y$*

Soit $f(x,y) = x \ln x - y \ln y$ $(x, y > 0)$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $f(x,y) = k$.

1) Suivant la position de $(a,b) \in \mathcal{C}_k$, préciser l'orientation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ en (a,b).

2) Dresser le tableau de variations de $\varphi(t) = t \ln t$.

3) Dessiner $\mathcal{C}_0$. (Étudier en particulier les points $(0,1), (1,0)$ et $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)

4) Indiquer l'allure générale des courbes $\mathcal{C}_k$ suivant le signe de k.

Exercice 41. *Fonction implicite*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.

2) Montrer que l'on a alors : $\partial z/\partial x + z\partial z/\partial y = 0$.

Exercice 42. *Équation fonction de deux paramètres*

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow x^5 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 1 = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage, V, de $(0,0)$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ &\varphi(0,0) = 1 \\ &\forall\,(\lambda,\mu) \in V,\ \varphi(\lambda,\mu) \text{ est racine simple de } (*). \end{aligned}$$

Donner le DL à l'ordre 2 de φ en $(0,0)$.

Exercice 43. *Changement de variable singulier, Matexo*

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même définie par $f(x,y) = (u,v)$, où

$$u(x,y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Calculer sa matrice jacobienne. Est-elle inversible localement ? Caractériser $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 44. *Différentielle du déterminant*

Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M. \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{d}f_M(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M)H)$.

Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_M(X) = (-1)^n X^n + \ldots + a_1 X + \det(M)$. Exprimer a_1 en fonction des cofacteurs de M.

Exercice 45. *Les racines d'un polynôme sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ des coefficients*

Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.

1) Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les racines de P. Montrer que l'application $P \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 46. *Non injectivité locale de l'exponentielle*

Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \exp(M). \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et exprimer, pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{d}f_M(H)$ sous forme d'une série.

2) Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour toutes matrices $A, B \in V$ on a : $\exp(A) = \exp(B) \Rightarrow A = B$.

3) Trouver une suite (M_k) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ distinctes ayant même exponentielle et convergeant vers une matrice A (donc il n'existe pas de voisinage de A sur lequel la restriction de f est injective).

4) Donner de même un point de non injectivité locale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 47. *Difféomorphisme*

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, h \in E,\ (\mathrm{d}f_x(h) \mid h) \geqslant \alpha \|h\|^2.$$

1) Montrer pour $x, y \in E$: $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geqslant \alpha\|x - y\|^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.

2) Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 48. *Difféomorphisme*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et k-lipschitzienne avec $k<1$ et $\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+f(y),y-f(x)).\end{cases}$

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 49. *Contre-exemple au théorème de Leibniz*

On pose : $f(x,y)=\begin{cases}x & \text{si } y\ge 0 \text{ et } 0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\ ;\\ 2\sqrt{y}-x & \text{si } y\ge 0 \text{ et } \sqrt{y}<x\leqslant 2\sqrt{y}\ ;\\ 0 & \text{si } y\ge 0 \text{ et } 2\sqrt{y}<x \text{ ou } x\leqslant 0\ ;\\ -f(x,-y) & \text{si } y<0.\end{cases}$ et : $F(y)=\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Faire un dessin, vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer $F(y)$ pour $-\frac14\leqslant y\leqslant\frac14$, $F'(0)$ et $\int_{x=0}^{1}\partial f/\partial y(x,0)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 50. *Centrale MP 2000*

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $c>0$ tels que, pour tous x,y, $\|f(x)-f(y)\|\geqslant c\|x-y\|$.

1) Montrer que pour tous x,h, $\|\mathrm{d}f_x(h)\|\geqslant c\|h\|$.

2) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ (pour la surjectivité on considèrera, si $a\in\mathbb{R}^n$, le minimum de $\|f(x)-a\|^2$).

Exercice 51. *Mines MP 2001*

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geqslant 1$ et $|g'(x)|<1$. Soit φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(f(x)+g(y),f(y)+g(x))$.

1) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

2) On suppose qu'il existe $k\in\,]0,1[$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|g'(x)|<k$; montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.

Exercice 52. *ENS MP 2002*

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $|f(x)|/\|x\| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Prouver que ∇f est surjective sur $\mathbb{R}^2$.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 53. *Solutions polynomiales*

Trouver les fonctions polynomiales $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vérifiant : $x\partial f/\partial x+y\partial f/\partial y=4f$.

Exercice 54. $2\partial f/\partial x+3\partial f/\partial y=4f$

Résoudre l'équation $2\partial f/\partial x+3\partial f/\partial y=4f$ avec la *condition aux limites* : $f(t,t)=t$ ($t\in\mathbb{R}$) (étudier $\varphi:t\mapsto f(a+bt,a+ct)$ avec a,b,c bien choisis).

Exercice 55. $\partial f/\partial x-\partial f/\partial y=cste$

Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\partial f/\partial x-\partial f/\partial y=a$ où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u=x+y$, $v=x-y$.

Exercice 56. $x\partial f/\partial x=y\partial f/\partial y$

Résoudre sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x\partial f/\partial x=y\partial f/\partial y$, en posant $u=xy$, $v=x/y$.

Exercice 57. $x\partial f/\partial x+y\partial f/\partial y=2$

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U=\{(x,y) \text{ tq } x>0,\ y>0\}$. Trouver les applications $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\partial f/\partial x+y\partial f/\partial y=2$. On utilisera le changement de variable : $u=xy$, $v=y/x$.

Exercice 58. $x\partial f/\partial x=-y\partial f/\partial y$

Résoudre sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $x\partial f/\partial x=-y\partial f/\partial y$, en posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

Exercice 59. $y\partial f/\partial x-x\partial f/\partial y=2f$

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $y\partial f/\partial x-x\partial f/\partial y=2f$. où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On pose $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Calculer $\partial g/\partial\rho$, $\partial g/\partial\theta$, puis trouver f …

1) Si $U=\{(x,y) \text{ tq } x>0\}$.

2) Si $U=\mathbb{R}^2$.

Exercice 60. *Ensi Physique P 94*

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $2xy\partial f/\partial x + (1+y^2)\partial f/\partial y = 0$ en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

Exercice 61. *Fonctions homogènes*

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) \neq (0,0)\}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ x\partial f/\partial x(x,y) + y\partial f/\partial y(x,y) = \alpha f(x,y).$$

On étudiera $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Exercice 62.

Résoudre l'équation : $x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = \alpha(\alpha-1)f$ où α est un réel fixé, $\alpha \neq \frac{1}{2}$.
On posera $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Exercice 63. *Équation d'ordre 2 à coefficients constants*

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*) \Leftrightarrow a\partial^2 f/\partial x^2 + b\partial^2 f/\partial x\partial y + c\partial^2 f/\partial y^2 = 0$$

où f est une fonction inconnue : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$.
1) Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.
2) En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :
(1) : $\partial^2 g/\partial u\partial v = 0$, (2) : $\partial^2 g/\partial u^2 = 0$, (3) : $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0$.

Exercice 64. $x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$

Trouver les applications $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0.$$

On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = x/y$.

Exercice 65. $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = y/x^3$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad g(y/x). \end{cases}$
Trouver g telle que $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = y/x^3$.

Exercice 66. $\partial^2 g/\partial x^2 - 4\partial^2 g/\partial y^2 = 1$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $g(x,y) = f(2x+y, 2x-y)$.
1) Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f.
2) Trouver f telle que $\partial^2 g/\partial x^2 - 4\partial^2 g/\partial y^2 = 1$.

Exercice 67. $x^2\partial^2 f/\partial x^2 - y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$

On considère l'équation aux dérivées partielles sur $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^2$: $x^2\partial^2 f/\partial x^2 - y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$.
Résoudre cette équation en posant $u = xy$, $v = x/y$.

Exercice 68. $f(\cos x/\operatorname{ch} y)$ *harmonique*

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère $g : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad f(\cos x/\operatorname{ch} y). \end{cases}$
Déterminer f pour que g vérifie : $\partial^2 g/\partial x^2 + \partial^2 g/\partial y^2 = 0$.

Exercice 69. *$(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$ préserve les fonctions harmoniques*

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

Soit $F:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v)\end{cases}$ et f définie par : $f(x,y)=F(u,v)$.

Montrer que $\partial^2F/\partial u^2+\partial^2F/\partial v^2=0$ entraîne $\partial^2f/\partial x^2+\partial^2f/\partial y^2=0$.

Exercice 70. $x\partial^2f/\partial x^2+y\partial^2f/\partial x\partial y+\partial^2f/\partial y^2+\partial f/\partial x=y$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g(u,v)=f(uv,u+v)$.

1) Calculer $\partial^2g/\partial u\partial v$.

2) Résoudre l'équation : $x\partial^2f/\partial x^2+y\partial^2f/\partial x\partial y+\partial^2f/\partial y^2+\partial f/\partial x=y$.

Exercice 71. *$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ tq $\Delta f=-f$*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g(x,y,z)=f(r)/r$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Déterminer f de sorte que $\partial^2g/\partial x^2+\partial^2g/\partial y^2+\partial^2g/\partial z^2=-g$.

Exercice 72. $x^4\partial^2f/\partial x^2-\partial^2f/\partial y^2=0$

1) Trouver les fonctions $g:\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } u>v\}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\partial/\partial u(g+v\partial g/\partial v)=\partial/\partial v(g+u\partial g/\partial u)$$

(penser au théorème de Poincarré).

2) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ l'équation : $x^4\partial^2f/\partial x^2-\partial^2f/\partial y^2=0$ en posant $u=y+\dfrac{1}{x}$, $v=y-\dfrac{1}{x}$.

Extrémums locaux

Exercice 73. *Étude de points critiques*

Chercher les extrémums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

1) $3xy-x^3-y^3$

2) $-2(x-y)^2+x^4+y^4$

3) $x^2y^2(1+3x+2y)$

4) $2x+y-x^4-y^4$

5) $\dfrac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x,y>0$

6) xe^y+ye^x

7) $x(\ln^2x+y^2)$, $x>0$

8) $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}$

9) $MA+MB-MO$, $\quad O=\mathrm{mil}(A,B)$

Exercice 74. *Distances aux sommets d'un triangle*

Soit $A\in\mathbb{R}^p$ fixé et $f:\begin{cases}\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ M & \longmapsto & AM^2\end{cases}$ $g:\begin{cases}\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ M & \longmapsto & AM\end{cases}$ (distance euclidienne).

1) Calculer les gradients de f et g en un point M.

2) Soient A,B,C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :

a) $MA^2+MB^2+MC^2$. **b)** $MA+MB+MC$. **c)** $MA\times MB\times MC$.

Exercice 75. *Aire d'un triangle*

Soit ABC un triangle de cotés a,b,c.

1) Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a,b,c.

2) Montrer que $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatéral.

Exercice 76. *Centrale MP 2000*

On considère un vrai triangle ABC et f la fonction définie par : $f(M)=d(M,AB)\times d(M,AC)\times d(M,BC)$. Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC, et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

Exercice 77. *Loi de réfraction*

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A=(0,a)$, $B=(b,-c)$ et $M=(x,0)$ $(a,b,c>0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1=\overline{(\vec{j},\overrightarrow{MA})}$ $\alpha_2=\overline{(-\vec{j},\overrightarrow{MB})}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1}=\dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

Exercice 78. *Centrale MP 2001*

D_1, D_2, D_3 sont trois droites d'un plan portant les côtés d'un triangle équilatéral de côté a. On pose

$$\varphi:\begin{cases} D_1\times D_2\times D_3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad (M,N,P) & \longmapsto \quad MN+NP+PM. \end{cases}$$

Déterminer $\min\varphi$ et les triplets (M,N,P) où ce minimum est atteint.

Exercice 79. *Centrale MP 2006*

E désigne l'espace affine euclidien classique. D_1, D_2, D_3 sont trois droites deux à deux non parallèles.

Soit $f:\begin{cases} D_1\times D_2\times D_3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (M_1,M_2,M_3) & \longmapsto \quad \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2+\|\overrightarrow{M_2M_3}\|^2+\|\overrightarrow{M_3M_1}\|^2. \end{cases}$

1) Montrer que f admet un minimum atteint pour un unique triplet.

2) Dans le cas où D_1, D_2, D_3 sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, trouver ce triplet.

Exercice 80. *Ajustement linéaire*

Problème d'ajustement linéaire : Etant donné n couples de réels (x_i,y_i) $1\leqslant i\leqslant n$, on cherche une droite D d'équation $y=ax+b$ telle que $\mu(a,b)=\sum_{i=1}^n(y_i-ax_i-b)^2$ soit minimal.

On note $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iy_i$, et on suppose $\overline{x^2}\neq\overline{x}^2$.

1) Résoudre le problème.

2) Interpréter la relation $\overline{x^2}\neq\overline{x}^2$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 81. *Plus court chemin, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005*

Déterminer le plus court chemin entre les pôles nord et sud d'une sphère en dimension 3.

Exercice 82. *Point non extrémal*

On pose pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}\quad \text{si } (x,y)\neq 0,\qquad f(0,0)=0.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $\theta\in\mathbb{R}$ fixé et $g_\theta(r)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r=0$.

3) Calculer $f(x,x^2)$. Conclusion ?

Exercice 83. *Centrale MP 2001*

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x)=f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Exercice 84. *Centrale MP 2000*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

1) On suppose que $\Delta u>0$. Montrer que $\displaystyle\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}}u(x,y)=\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}\setminus\Omega}u(x,y)$.

2) Même question en supposant seulement $\Delta u\geqslant 0$.

3) Soit $0<r_1<r_2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid r_1^2<x^2+y^2<r_2^2\}$. On suppose que u est continue sur $\overline{A}$, $\mathcal{C}^2$ sur A et que $\Delta u\geqslant 0$ sur A. On pose pose $M(r)=\displaystyle\max_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$.

Montrer que, pour tout $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, $M(r)\leqslant\dfrac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$.

Indication : la fonction $v:(x,y)\mapsto\ln(x^2+y^2)$ vérifie $\Delta v=0$.

Exercice 85. *Extremums liés, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005*

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et $x \in B$ tel que $f(x) = \max\{f(y),\ y \in B\}$.
Montrer que $\nabla f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 86. *CCP 2016*

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire noté $(\ \mid\ )$ et de la norme associée. Soit $b \in E$. On pose $f(x) = (u(x) \mid x) - (b \mid x)$.

1) **a)** Montrer que f est différentiable en tout point x et que sa différentielle vaut $\mathrm{d}f_x(h) = (2u(x) - b \mid h)$.
   b) En déduire le gradient de f.
   c) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur E.

2) On suppose $\mathrm{sp}(u) \subset]0, +\infty[$.
   a) Trouver les points critiques de f.
   b) Montrer que f n'a pas de maximum global sur E.
   c) Montrer que f admet un minimum global en un point que l'on précisera.

Exercice 87. *Mines 2017*

1) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ dérivable, où U est un ouvert de $\mathbb{R}$, admettant un extremum local en x_0. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

2) Donner un théorème équivalent lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et le démontrer.

3) Trouver les extremums de $f : (x, y) \mapsto |\sin(x + iy)|^2$ sur l'ensemble $U = \{(x, y) \text{ tq } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

solutions

Exercice 2.
$\lim = 3$.

Exercice 3.
2) $\partial f/\partial x = \dfrac{\pm 1}{1+x^2}$, $+$ si $y > x$, $-$ si $y < x$.
$\partial f/\partial y = \dfrac{\pm 1}{1+y^2}$, $-$ si $y > x$, $+$ si $y < x$.
3) Pour $y \geqslant x$, $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2} + g(x,y)$, pour $y \leqslant x$, $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2} - g(x,y)$.

Exercice 6.
$\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial u/\partial x \partial u/\partial y \partial^2 g/\partial u^2 + (\partial u/\partial x \partial v/\partial y + \partial u/\partial y \partial v/\partial x)\,\partial^2 g/\partial u \partial v + \partial v/\partial x \partial v/\partial y \partial^2 g/\partial v^2 + \partial^2 u/\partial x \partial y \partial g/\partial u + \partial^2 v/\partial x \partial y \partial g/\partial v$.

Exercice 8.
2) $\Delta f = \partial^2 g/\partial \rho^2 + \dfrac{1}{\rho}\partial g/\partial \rho + \dfrac{1}{\rho^2}\partial^2 g/\partial \theta^2$.

Exercice 10.
$\Delta F = \dfrac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$.

Exercice 13.
$\dfrac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{i}\binom{n-k}{j} \dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \dfrac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}$.

Exercice 17.
1) $f(x,y) = \int_{t=0}^{1} (x \partial f/\partial x(tx,ty) + y \partial f/\partial y(tx,ty))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18.
1) a) thm des trois cordes pour $u \mapsto f(x+uh)$ sur $[-1,1]$.
b) Soit $\overline{B}_\infty(x,r) \subset U$ et y tel que $0 < \|x-y\|_\infty \leqslant r$. On note $t = \|x-y\|_\infty/r$ et $h = (y-x)/t$. Alors $y = x + th$ et $\|x \pm h\| = r$ donc :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant t \max(|f(x+h) - f(x)|, |f(x-h) - f(x)|) \leqslant Mt$$

car la restriction de f aux côtés de $\overline{B}_\infty(x,r)$ est bornée (fonction convexe en dimension 1).
2) La surface représentative de f est au dessus de ses plans tangents.

Exercice 21.
1) $xy/(x^2+y^2)$.
2) f est lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$.

Exercice 22.
1) On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et l'on a
$0 = \Delta f = \partial^2 g/\partial r^2 + \dfrac{1}{r}\partial g/\partial r + \dfrac{1}{r^2}\partial^2 g/\partial \theta^2$ d'où :

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \frac{1}{r^2}\Big[\partial g/\partial \theta(r,\theta)\Big]_{\theta=0}^{2\pi}$$

Le crochet est nul par 2π-périodicité de g donc $h''(r) + \dfrac{1}{r}h'(r) = 0$ soit $h'(r) = \dfrac{K}{r}$ et $K = 0$ par continuité de h' en 0.
2) $\pi r^2 f(0,0)$.

Exercice 23.

Remarques :

– la transformation $f \mapsto g$ est appelée *transformation de Legendre.* On notera $g = f^*$ ci-dessous.

– l'hypothèse « H_f est définie positive en tout point » implique que f est convexe.

Étude d'un cas particulier : $f(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x \mid a) + \gamma$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

Alors $(x \mid y) - f(x) = -\alpha\Big\|x - \dfrac{y-\beta a}{2\alpha}\Big\|^2 + \alpha\Big\|\dfrac{y-\beta a}{2\alpha}\Big\|^2 - \gamma$

d'où $f^*(y) = \alpha\Big\|\dfrac{y-\beta a}{2\alpha}\Big\|^2 - \gamma = \alpha^*\|y\|^2 + \beta^*(y \mid a) + \gamma^*$ avec $\alpha^* = 1/4\alpha$, $\beta^* = -\beta/2\alpha$

et $\gamma^* = \beta^2\|a\|^2/4\alpha - \gamma$. Ainsi, f^* a la même forme que f, et on vérifie immédiatement que $f^{**} = f$.

Cas général : on montre que f^* est bien définie, vérifie les mêmes hypothèses que f et que l'on a $f^{**} = f$.

1. Bonne définition de f^* : à y fixé on a $(x \mid y) - f(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc le sup existe et est un max, atteint en un point x tel que $\nabla f(x) = y$. Ce point x est unique : en effet, si $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (h \mid \nabla f(x+th))$ est strictement croissante (définie-positivité de H_f) ce qui implique $\nabla f(x+h) \neq \nabla f(x)$. Ainsi,

$$f^*(y) = (y \mid y^*) - f(y^*) \text{ avec } \nabla f(y^*) = y.$$

2. f^* est $\mathcal{C}^2$ et H_{f^*} est définie-positive : d'après ce qui précède, la fonction ∇f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$; sa différentielle est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice H_f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $y, h \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}(f^*)_y(h) = (\nabla f^*(y) \mid h) = (h \mid y^*) + (y \mid \mathrm{d}y^*(h)) - (\nabla f(y^*) \mid \mathrm{d}y^*(h)) = (h \mid y^*)$$

puisque $\nabla f(y^*) = y$. On en déduit : $\nabla f^*(y) = y^*$, puis $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$, matrice symétrique définie positive.

3. $f^*(y)/\|y\| \underset{\|y\|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$: soit $a > 1$ et $M_a = \sup\{f(x),\ \|x\| \leqslant a\}$. Pour $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $x = ay/\|y\|$ on a $f^*(y) \geqslant (x \mid y) - f(x) \geqslant a\|y\| - M_a \geqslant (a-1)\|y\|$ si $\|y\|$ est assez grand.

4. $f^{**} = f$: car pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f^{**}(x) = (x \mid y) - f^*(y)$ où y est défini par $\nabla f^*(y) = x$, c'est-à-dire $y^* = x$ et donc $f^{**}(x) = (y^* \mid y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$.

Exercice 24.

1) ???

2) On a pour $a, b \in \mathbb{R}$: $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$.
Donc pour $f, h \in E$: $|T(f+h) - T(f) - (h \mid \varphi' \circ f)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty\|h\|^2$, ce qui prouve que T est différentiable en f de différentielle $h \mapsto (h \mid \varphi' \circ f)$. On en déduit alors que T est continue en f.

Exercice 25.

$\partial g/\partial x(0,y) = -yf'(\pi/2)$, $\partial g/\partial y(x,0) = xf'(0)$.

Exercice 26.

1) f est homogène de degré 2, $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont homogènes de degré 1, donc ces trois fonctions tendent vers 0 en $(0,0)$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) $\partial^2 f/\partial x\partial y(0,0) = 0$, $\partial^2 f/\partial y\partial x(0,0) = 1$.

Exercice 28.

1) pas de solution.

2) $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y+1} +$ cste.

3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y} +$ cste.

4) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{x}{y} +$ cste.

Exercice 29.
$f(y) = \lambda e^{-y}$, $F(x,y) = \lambda\left(\dfrac{x^2}{2} - (y+1)e^{-y}\right)$.

Exercice 30.
$f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

Exercice 31.
$f(y) = y/k$, $g(z) = kz + \ell$, $F(x,y) = \left(x^2 + \dfrac{y^2}{2}\right)z + \dfrac{\ell y^2}{2k} + C$.

Exercice 32.
1) $f(x,y) = -\dfrac{\ln x}{xy} - \dfrac{1}{x}$.
2) $y = \dfrac{\ln x}{\lambda x - 1}$.

Exercice 33.
$\det(J_f) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Exercice 35.
$f(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w) \text{ tq } u+v>0,\ ue^{2w} - v > 0\}$.

Exercice 36.
1) $\det(J_f(x,y)) = 2(y-x) < 0$ donc le théorème d'inversion locale s'applique : $f(U)$ est ouvert. De plus $f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (x+y = x'+y', xy = x'y') \Rightarrow \{x,y\} = \{x',y'\} \Rightarrow (x,y) = (x',y')$ compte tenu de U. Ainsi $f_{|U}$ est injective et le théorème d'inversion globale s'applique.
2) $f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow (x+y = u, xy = \frac{1}{2}(u^2-v))$. Il y a des solutions distinctes si et seulement si $v > \frac{1}{2}u^2$, ce qui définit $f(U)$.

Exercice 37.
$y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow$ tangente de pente $-\frac{1}{2}$, au dessus.

Exercice 38.
2) $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 39.
$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}$, $\varphi''(1) = -\frac{8}{27}$.

Exercice 42.
$x = 1 - \dfrac{\lambda+\mu}{5} + \dfrac{\lambda^2 + \lambda\mu}{25} + o(\lambda^2+\mu^2)$.

Exercice 43.
$x = \mathrm{sh}(a),\ y = \mathrm{sh}(b) \Rightarrow u = \mathrm{sh}(a+b),\ v = \mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{ch}(a+b)$. donc $f(\mathbb{R}^2)$ est inclus dans l'hyperbole d'équation $v^2 - 2uv = 1$ et on doit avoir $v \geqslant u$ ce qui donne la branche supérieure.

Exercice 46.
1) $\mathrm{d}f_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}(M^{k-1}H + \ldots + HM^{k-1})$.
3) les matrices $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ sont toutes semblables à M_∞ et ont même exponentielle I.
4) $M_k = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi + 1/k \\ -4\pi^2/(2\pi+1/k) & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 50.
2) $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En ce point on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$: $(f(x) - a \mid \mathrm{d}f_x(h)) = 0$ et $\mathrm{d}f_x$ est surjective (linéaire injective en dimension finie) donc $f(x) = a$.

Exercice 51.

1) $\det(J_\varphi(x,y)) = f'(x)f'(y) - g'(x)g'(y) > 0$ donc le théorème d'inversion locale s'applique, il suffit de vérifier l'injectivité de φ. Si $\varphi(x,y) = \varphi(u,v)$ alors :

$$|x-u| \leqslant |f(x)-f(u)| = |g(v)-g(y)| \leqslant |v-y|$$
$$|v-y| \leqslant |f(v)-f(y)| = |g(x)-g(u)| \leqslant |x-u|$$

d'où $|x-u| \leqslant |x-u|$ et il y a inégalité stricte si $v \neq y$ ce qui est absurde donc $v = y$ et de même $u = x$.

2) On a $\varphi(x,y) = (u,v)$ si et seulement si $x = f^{-1}(u-g(y))$ et $y = f^{-1}(v - g(f^{-1}(u-g(y)))) = h(y)$. h est k^2-lipschitzienne donc le théorème du point fixe s'applique.

Exercice 52.

Sinon il existe $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $g : x \mapsto f(x) - (a \mid x)$ n'a pas de point critique, donc pas de minimum ni de maximum. On a aussi $|g(x)|/\|x\| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où $\sup(g) = +\infty$ et $\inf(g) = -\infty$. Considérons pour $r > 0$ $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \geqslant r\}$: $g(E_r)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle, et $\sup(g(E_r)) = \sup(g) = +\infty$, $\inf(g(E_r)) = \inf(g) = -\infty$, d'où $g(E_r) = \mathbb{R}$. Ainsi il existe des x de normes arbitrairement grandes tels que $g(x) = 0$ en contradiction avec la propriété $|g(x)|/\|x\| \underset{\|x\|\to\infty-}{\longrightarrow} \infty$.

Remarque : l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^2$ est surabondante, la classe $\mathcal{C}^1$ suffit à conclure.

Exercice 54.

$f(x,y) = (3x-2y)e^{4(y-x)}$.

Exercice 55.

$f(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + g(x+y)$.

Exercice 56.

$f(x,y) = g(xy)$.

Exercice 57.

$f(x,y) = \ln|xy| + g(y/x)$.

Exercice 58.

$f(x,y) = g(\theta)$.

Exercice 59.

1) $g(\rho,\theta) = \lambda(\rho)e^{-2\theta}$.

2) g est 2π-périodique, donc $\lambda = 0$, et $f = 0$.

Exercice 60.

$f(x,y) = g\Big(\dfrac{1+y^2}{x}\Big)$.

Exercice 62.

$f(x,y) = \rho^\alpha A(\theta) + \rho^{1-\alpha}B(\theta)$.

Exercice 63.

1) $(a + b\alpha + c\alpha^2)\partial^2 g/\partial u^2 + (2a + b(\alpha+\beta) + 2c\alpha\beta)\partial^2 g/\partial u\partial v + (a + b\beta + c\beta^2)\partial^2 g/\partial v^2 = 0$.

Exercice 64.

$2u\partial^2 g/\partial u^2 + \partial g/\partial u = 0 \Rightarrow f(x,y) = A(x/y)\sqrt{xy} + B(x/y)$.

Exercice 65.

$2tg'(t) + (1+t^2)g''(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}t + \lambda\arctan t + \mu$.

Exercice 66.

1) $\partial^2 g/\partial x^2 = 4\partial^2 f/\partial x^2 + 8\partial^2 f/\partial x\partial y + 4\partial^2 f/\partial y^2$
$\partial^2 g/\partial y^2 = \partial^2 f/\partial x^2 - 2\partial^2 f/\partial x\partial y + \partial^2 f/\partial y^2$
$\partial^2 g/\partial x\partial y = 2\partial^2 f/\partial x^2 - 2\partial^2 f/\partial y^2$.

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{16} + h(x) + k(y)$.

Exercice 67.

$2u\partial^2 g/\partial u\partial v - \partial g/\partial v = 0 \Rightarrow f(x,y) = g\Big(\dfrac{x}{y}\Big)\sqrt{xy} + h(xy)$.

Exercice 68.

$(1-t^2)f'' - 2tf' = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda \ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right| + \mu$.

Exercice 69.

$\mathit{\Delta} f = 4(x^2+y^2)\mathit{\Delta} F$.

Exercice 70.

1) $\partial^2 g/\partial u\partial v = uv\partial^2 f/\partial x^2 + (u+v)\partial^2 f/\partial x\partial y + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial f/\partial x$.

2) $f(x,y) = \frac{1}{2}xy + h(u) + k(v)$ avec $u+v = y$, $uv = x$.

Exercice 71.

$f(r) = A\cos r + B\sin r$.

Exercice 72.

1) Il existe G telle que $\partial g/\partial u = g + u\partial g/\partial u = \partial(ug)/\partial u$ et $\partial g/\partial v = g + v\partial g/\partial v = \partial(vg)/\partial v$.
Donc $G = ug + \varphi(v) = vg + \psi(u)$, d'où $g = \dfrac{\varphi(v)-\psi(u)}{v-u}$. La réciproque est immédiate.

2) $f(x,y) = x\Big(\varphi\Big(y - \dfrac{1}{x}\Big) + \psi\Big(y + \dfrac{1}{x}\Big)\Big)$.

Exercice 73.

1) $(0,0)$: non extrémal
$(1,1)$: maximum local

2) $(0,0)$: non extrémal
$\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: minimum absolu

3) $(-2/15, -1/5)$: maximum local
$(x,0)$: max. local pour $x < -1/3$, min. local pour $x > -1/3$
$(0,y)$: max. local pour $y < -1/2$, min. local pour $y > -1/2$

4) $(2^{-1/3}, 4^{-1/3})$: maximum absolu

5) prendre le log. $(1,1)$: maximum absolu

6) $(-1,-1)$: non extrémal

7) $(1,0)$: minimum absolu
$(e^{-2}, 0)$: non extrémal

8) $= MA + MB \Rightarrow$ minimum absolu sur $[A,B]$

9) $M \in \mathrm{med}(A,B)$, $\overline{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \pm\dfrac{2\pi}{3}$
$M = A, B$: minimum absolu
$M = O$

Exercice 74.

2) a) isobarycentre de ABC.
b) Point de Fermat ou A, B, C.
c) A, B, C.

Exercice 75.

1) $4S = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.

2) $\max = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Exercice 76.

Existence d'un maximum par compacité. Soient x, y les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé du plan et (u, v, w) les coordonnées barycentriques de M par rapport à A, B, C (avec $u + v + w = 1$). u, v, w sont des fonctions affines de x, y, z et (AB) a pour équation barycentrique $w = 0$ d'où $d(M, AB) = \alpha|w|$ pour un certain réel $\alpha > 0$. De même pour $d(M, AC)$ et $d(M, BC)$ et $f(M) = \alpha\beta\gamma|u||v||w|$. Lorsque M varie dans le triangle, (u, v, w) décrit tous les triplets de réels positifs de somme 1 et on cherche le maximum du produit uvw, il est atteint quand u, v, w sont égaux, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle.

Exercice 78.

Le minimum demandé existe car $\varphi(M, N, P) \to +\infty$ quand l'un au moins des points M, N, P tend vers l'infini sur sa droite personnelle. Soient $D_1 \cap D_2 = \{A\}$, $D_2 \cap D_3 = \{B\}$, $D_3 \cap D_1 = \{C\}$ et A', B', C' les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Déjà on a $\varphi(B', C', A') = \frac{3}{2}a$ et $\varphi(A, N, P) \geqslant 2AP \geqslant a\sqrt{3}$ donc le minimum n'est pas atteint lorsque l'un des points M, N, P est confondu avec l'un des points A, B, C, ni non plus si l'un des points M, N, P est hors du triangle ABC. Pour N, P fixés hors de D_1, on fait varier M sur D_1 : $M = A + t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et on considère $f(t) = \varphi(M, N, P)$. Alors $f'(t) = \left(\overrightarrow{AB} \mid \dfrac{\overrightarrow{MN}}{MN} + \dfrac{\overrightarrow{MP}}{MP}\right)$ donc $f(t)$ est minimal lorsque D_1 est la bissectrice extérieure des demi-droites $[MN)$ et $[MP)$.

Soit (M, N, P) un triplet réalisant le minimum de φ et α, β, γ les angles du triangle MNP en P, M et N. Les angles du triangle AMN sont $\pi/3$, $(\pi - \beta)/2$ et $(\pi - \gamma)/2$ d'où $2\pi/3 = \beta + \gamma = \pi - \alpha$ et donc $\alpha = \pi/3 = \beta = \gamma$. On en déduit que (MP) est paralèle à (AB), (MN) à (BC) et (NP) à (AC) puis que $(M, N, P) = (B', C', A')$.

Exercice 79.

1) On fixe $A_i \in D_i$ et u_i un vecteur directeur de D_i. Soit $M_i = A_i + x_i u_i$. Alors

$$\begin{aligned} f(M_1, M_2, M_3) &= f(A_1, A_2, A_3) \\ &\quad + 2\Big((\overrightarrow{A_1A_2} \mid x_2u_2 - x_1u_1) + (\overrightarrow{A_2A_3} \mid x_3u_3 - x_2u_2) + (\overrightarrow{A_3A_1} \mid x_1u_1 - x_3u_3)\Big) \\ &\quad + \Big(\|x_2u_2 - x_1u_1\|^2 + \|x_3u_3 - x_2u_2\|^2 + \|x_1u_1 - x_3u_3\|^2\Big) \\ &= a + b(x_1, x_2, x_3) + c(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

b est une forme linéaire et c est une forme quadratique positive, et même définie positive car u_1, u_2, u_3 sont deux à deux non colinéaires. Il en résulte que $f(M_1, M_2, M_3) \underset{|x_1|+|x_2|+|x_3| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par continuité, f admet un minimum.

Choisissons alors A_1, A_2, A_3 de sorte que $f(A_1, A_2, A_3)$ soit égal à ce minimum. On a alors $b = 0$ car (A_1, A_2, A_3) est point critique de f, d'où $f(M_1, M_2, M_3) > f(A_1, A_2, A_3)$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ vu la définie-positivité de c. Ceci prouve l'unicité du triplet où f atteint son minimum.

2) On soupçonne fortement le triplet constitué des milieux des côtés. En notant A_1, A_2, A_3 ces milieux, il suffit de vérifier que la forme linéaire b de la réponse précédente est nulle, et c'est clairement le cas après regroupement autour de x_1, x_2, x_3.

Exercice 81.

On paramètre le chemin en coordonnéees sphériques par $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t))$.

La longueur du chemin est $\int_{t=0}^{1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \sin^2(\varphi(t))\theta'^2(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \left|\int_{t=0}^{1} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|$ avec égalité si et seulement si $\theta' = 0$ et φ' est de signe constant. On trouve donc les méridiens.

Exercice 82.

1) $2x^4y^2 \leqslant (x^4 + y^2)^2$.

2) $g_\theta(r) \sim r^2$.

3) $f(x, x^2) = -x^4$. Donc $(0, 0)$ n'est pas minimum local de f.

Exercice 83.

Il existe une base orthonormale de E et un réel λ tels que $f(x)=\lambda x_1$ et $g(x)=\lambda x_1 e^{-x_1^2}e^{-x_2^2-\ldots-x_n^2}$. Donc g est maximale/minimale pour $x_1=\pm 1/\sqrt{2}$, $x_2=\ldots=x_n=0$.

Exercice 84.

1) Si u atteint son maximum en $(x,y)\in\Omega$ alors $\mathrm{d}^2u(x,y)$ est négative, contradiction avec $\Delta u(x,y)>0$.

2) Soit $u_p(x,y)=u(x,y)+(x^2+y^2)/p$: $\Delta u_p=\Delta u+2/p>0$ donc u_p relève du cas précédent.
On a $\max\limits_{\Omega} u+\dfrac{M}{p}\geqslant \max\limits_{\Omega} u_p=\max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u_p\geqslant\max\limits_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u$ et on passe à la limite.

3) Soit $u_1(x,y)=u(x,y)+\alpha\ln(x^2+y^2)$ où α est tel que $M_1(r_1)=M_1(r_2)$,
avec $M_1(r)=\max\limits_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$. On a $\Delta u_1\geqslant 0$ d'où $M_1(r)\leqslant M_1(r_1)=M_1(r_2)$ c'est-à-dire :

$$M(r)\leqslant M(r_1)+\alpha\ln(r_1/r)=M(r_2)-\alpha\ln(r/r_2)=\frac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Exercice 85.

Soit $y\in B$ orthogonal à x. La fonction $g:\theta\mapsto f(x\cos\theta+y\sin\theta)$ admet un extrémum en 0, donc $g'(0)=0$, soit $\nabla f(x)\perp y$. Si $x=0$ on a donc $\nabla f(0)=0$. Sinon, $\nabla f(x)=\lambda x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, et en faisant un développement limité de $f(x-tx)$ on voit que $\lambda\geqslant 0$.

Exercice 86.

1) a) Développer $f(x+h)$ et utiliser la symétrie de u.
b) $\nabla f(x)=2u(x)-b$.
c) u est continue en tant qu'endomorphisme d'un ev de dimension finie.

2) a) u est bijective ; le seul point annulant $\nabla f(x)$ est $x=\frac{1}{2}u^{-1}(b)$.
b) Soit $\lambda\in\mathrm{sp}(u)$ et x_λ un vecteur propre associé. On a $f(tx_\lambda)=t^2\lambda\|x_\lambda\|^2-t(b\mid x_\lambda)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$.
c) Soit $x_0=\frac{1}{2}u^{-1}(b)$ le point critique de f. On a $f(x_0+h)=f(x_0)+(u(h)\mid h)$ et $(u(h)\mid h)>0$ si $h\neq 0$ par décomposition de h dans une base orthonormale propre pour u. Donc f admet un minimum global strict en x_0.

Exercice 87.

3) $f(x,y)=\mathrm{ch}^2(y)-\cos^2(x)=\mathrm{sh}^2(y)+\sin^2(x)$. Le seul point critique dans $\mathring{U}$ est $(x,y)=(0,0)$ et il y a minimum global. Comme U est compact et f continue, il y a aussi un maximum atteint sur la frontière.

Soit $\varphi(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)=\sin^2\cos\theta+\mathrm{sh}^2\sin\theta$: $\varphi'(\theta)=\sin 2\theta\left(\dfrac{\mathrm{sh}(2\sin\theta)}{2\sin\theta}-\dfrac{\sin(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right)$ s'annule uniquement pour $\theta\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi/2)$. On obtient $\max(f)=\mathrm{sh}^2(1)$.