

Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Équations linéaires d'ordre 1

Intégrer les équations suivantes :

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) $(2+x)y' = 2-y$. | 2) $xy' + y = \cos x$. |
| 3) $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$. | 4) $x^3y' - x^2y = 1$. |
| 5) $3xy' - 4y = x$. | 6) $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$. |
| 7) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$. | 8) $x(x+1)y' + y = \arctan x$. |
| 9) $x(x^2-1)y' + 2y = x \ln x - x^2$. | |

Exercice 2. Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Intégrer :

- | | |
|--|---|
| 1) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$. | 2) $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$. |
| 3) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$. | 4) $y'' + y = \cotan x$. |
| 5) $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$. | 6) $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme. |
| 7) $y'^2 + y^2 = 1$ (dériver). | |

Exercice 3. Équations d'ordre 2 à coefficients non constants

Intégrer les équations suivantes :

- 1) $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
- 2) $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
- 3) $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
- 4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x$ (poser $u = \ln x$).
- 5) $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
- 6) $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ (poser $y = \frac{u}{x^2}$).
- 7) $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales).
- 8) $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois).

Exercice 4. Résolution par DSE

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$. | 2) $xy'' + 2y' - xy = 0$. |
| 3) $4xy'' + 2y' - y = 0$. | 4) $y'' + xy' + 3y = 0$. |
| 5) $x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$. | 6) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$. |

Exercice 5. $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π -périodique.

Exercice 6. $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Exercice 7. $y' = |x - y|$

Résoudre l'équation : $y' = |x - y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

Exercice 8. $y'' + |y| = 1$

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 9. Mines MP 2000

Résoudre (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz = 1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

Exercice 10. Mines MP 2000

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.

2) Montrer que si f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , g l'est également. Relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t) dt$.

Exercice 11. Solution L^2 , X 2013

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, L^2 . On considère l'équation différentielle $y' - ay = f(t)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette équation et qui est L^2 .

Exercice 12. Systèmes différentiels à coefficients constants

x, y, z sont des fonctions de t . Résoudre les systèmes :

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1)} \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases} & \mathbf{2)} \begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases} & \mathbf{3)} \begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases} \\
 \mathbf{4)} \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases} & \mathbf{5)} \begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases} & \mathbf{6)} \begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 13. Système différentiel à coefficients non constants

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2 + 1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$

Exercice 14. Lemme des noyaux, Matexo

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation : $y'' + py' + qy = 0$. On note S l'ensemble des solutions de (E) et D l'application de S dans S définie par $D(f) = f'$.

1) D peut-elle être une homothétie ?

2) Déterminer les valeurs de p et q pour lesquelles D n'est pas un isomorphisme de S .

3) Vérifiez que $D \circ D + pD + q \operatorname{id}_S = 0$ et montrer qu'il existe des nombres complexes r_1 et r_2 tels que : $(D - r_1 \operatorname{id}_S) \circ (D - r_2 \operatorname{id}_S) = 0$.

4) Les applications $D - r_1 \operatorname{id}_S$, $D - r_2 \operatorname{id}_S$ peuvent-elles être inversibles ?

Exercice 15. $y'' + xy' + y = 0$, Matexo

On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1) Montrer que les dérivées de y vérifient $y^{(n)} + x y^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)} = 0$, $\forall n \geq 2$.

2) Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.

3) Montrer que y admet le développement limité à l'origine ($x \rightarrow 0$):

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \dots + \frac{(-2)^k k! x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}).$$

Exercice 16. $f''(x) + f(-x) = x \cos x$

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x$.

Exercice 17. $y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$

On considère l'équation différentielle : $(*) \Leftrightarrow y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0$.

1) On pose $z(x) = y'(x) + \frac{y(x)}{\operatorname{th} x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.

2) Résoudre sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z , puis $(*)$.

3) Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?

On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$.

4) Démontrer que y_0 est de classe \mathcal{C}^1 et que $\frac{y_0'(x)}{\operatorname{th} x}$ admet une limite finie en 0.

En déduire que y_0 est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

5) Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Exercice 18. $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g : t \mapsto f'(t) + tf(t). \end{cases}$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2 .

3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Exercice 19. $x^2 f''(x) + x f'(x) = \lambda f(x)$

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1) $E = \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P)(X) = X^2 P''(X) + X P'(X)$.

2) $E = \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, $\Phi(f)(x) = x^2 f''(x) + x f'(x)$.

3) $E = \mathcal{C}^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ $\Phi(f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} f'(x)$.

Exercice 20. $AP' - nA'P = \lambda P$

Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.

1) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

2) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :

a) $A = X^2 - 1$, b) $A = X^2$, c) $A = X^2 + 1$.

Exercice 21. *Équation intégrale*

Trouver les applications $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues vérifiant pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2} \int_{t=0}^x g^2(t) dt = \frac{1}{x} \left(\int_{t=0}^x g(t) dt \right)^2 .$$

Exercice 22. *Inéquations différentielles*

Soient $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, et y, z solutions de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leq a(t)z + b(t). \end{cases}$

Démontrer que : $\forall t \geq 0$, on a $y(t) \geq z(t)$.

Exercice 23. *Tangentes parallèles ou concourantes*

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' = a(x)y + b(x)$ et x_0 un réel fixé. Montrer que les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse x_0 sont parallèles ou concourantes.

Exercice 24. $y' + ay = \text{fct périodique}$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -périodique, continue. On considère l'équation : $(*) \Leftrightarrow y' + \lambda y = \varphi(x)$.

- 1) Montrer que si y est solution de $(*)$, alors $x \mapsto y(x+T)$ est aussi solution.
- 2) En déduire que y , solution de $(*)$, est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
- 3) Montrer que, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ , l'équation $(*)$ admet une et une seule solution T -périodique.

Exercice 25. *Coefficients périodiques*

Soit l'équation $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$ où a, b sont des fonctions continues, T -périodiques.

- 1) Montrer que si y est solution de $(*)$, alors la fonction définie par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.
- 2) En déduire que si $\int_{t=0}^T a(t) dt \neq 0$, alors $(*)$ admet une unique solution T -périodique.

Exercice 26. *Équation intégrale*

Soit $E = \{ \text{fcts} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} \}$ et $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g \end{cases}$ avec $g(x) = \int_{t=0}^1 \inf(t, x) f(t) dt$.

Chercher les valeurs propres et les fonctions propres de Φ .

Exercice 27. *Matexo*

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ fixé. On considère : $E = \{ f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 3 \}$.

Déterminer $\inf_{f \in E} \int_{t=0}^1 (f'(t) + kf(t))^2 dt$. *Indication : poser $f' + kf = g$ et calculer $f(1)$ en fonction de g .*

Exercice 28. *Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000*

Soient u, v, w trois applications bornées et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^3 , vérifiant : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^\infty \|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite de terme général t_n tendant vers $+\infty$ telle que $u(t_n)$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$.

- 1) Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} u(t) dt$ tend vers a .
- 2) Montrer que les suites de termes généraux $v_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t) dt$ et $w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t) dt$ tendent vers 0.

Exercice 29. *Centrale MP 2001*

Soit f continue et intégrable sur \mathbb{R} . On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y + f = 0$.

- 1) Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que F est intégrable sur \mathbb{R} et comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 30. *Centrale MP 2001*

Trouver les fonctions f, g continues vérifiant : $\int_{t=0}^x f(t) dt = x - 1 + g(x)$ et $\int_{t=0}^x g(t) dt = x - 1 + f(x)$.

Exercice 31. *Polytechnique PC 2002*

Soit l'équation différentielle : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d \cos(x))u(x) = 0$.

- 1) Existence et domaine de définition des solutions maximales A et B telles que $A(0) = 1, A'(0) = 0$ et $B(0) = 0, B'(0) = 1$.
- 2) Montrer que A est paire et B est impaire.
- 3) Montrer que $A(k, d, x) = A(k, 0, x) + 2d \int_{t=0}^x B(d, 0, x-t) A(k, d, x) \cos(t) dt$.

Exercice 32. $f \mapsto f + f'$ (*Mines MP 2003*)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est bornée.

Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f + f' \end{cases}$.

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Est-ce que u est injectif ?
- 3) Est-ce que u est surjectif ?

Exercice 33. Centrale MP 2004

On considère l'équation différentielle : $-y'' + \frac{y}{p^2} = f$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction continue donnée.

- 1) Donner les solutions de cette équation. Montrer que $x \mapsto -\int_{t=0}^x pf(t) \operatorname{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right) dt$ est solution.
- 2) Montrer qu'il existe une unique solution telle que $y(0) = y(1) = 0$. On la note u_p .
- 3) Montrer que (u_p) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 34. Centrale MP 2004

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2} + (1-\lambda)x^2u(x) = 0$.

- 1) Montrer que les solutions de (\mathcal{E}) sont de la forme $H(x)e^{-x^2/2}$ où H est une fonction développable en série entière.
- 2) Déterminer les valeurs de λ telles que H soit une fonction polynomiale non nulle.

Exercice 35. Lemme de Gronwall (X MP* 2003)

Soient f, g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \geq 0, g(t) \geq 0$ et $f(t) \leq a + \int_{u=0}^t f(u)g(u) du$.
Montrer : $\forall t \geq 0, f(t) \leq a \exp\left(\int_{u=0}^t g(u) du\right)$.

Exercice 36. $y'' + y \geq 0$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f''(x) \geq 0$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Exercice 37. $f'' + f' + f \rightarrow 0$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f''(t) + f'(t) + f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Exercice 38. $f'' \geq f + 2/\operatorname{ch}(x)^3$, Centrale PC 1997

Soit f de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout $x : f''(x) \geq f(x) + \frac{2}{\operatorname{ch}(x)^3}$.

Montrer pour tout $x : f(x) \geq \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}$.

Exercice 39. $y' + ay = b, y(-\infty) = 0$

Soit $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) \geq 1$ et $b(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

- 1) Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.
- 2) On suppose $b(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} 0$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Exercice 40. $y'' + ay = 0, a > 0 \Rightarrow y$ s'annule

Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

- 1) Soit y une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .
- 2) Soit z une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} .

Exercice 41. $y'' + ay = 0$ avec a croissante positive $\Rightarrow y$ est bornée

Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$ (on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$).

Exercice 42. $y'' + ay = 0, a$ intégrable

Soit $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$ (on commencera par prouver que si y_1, y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant).

Exercice 43. Zéros entrelacés (Centrale MP 2003)

Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall x \in I, r(x) \geq q(x)$. On considère les équations différentielles : $(E_1) \Leftrightarrow y'' + qy = 0$, et $(E_2) \Leftrightarrow z'' + rz = 0$.

- 1) Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y . $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?
- 2) Soit z une solution de (E_2) . On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
- 3) Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
- 4) Soit u une solution de (E_1) . Montrer que u est soit proportionnelle à y , soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Exercice 44. Zéros des solutions de $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'équation $(*) \Leftrightarrow y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a, b continues.

- 1) Soit y une solution non nulle de $(*)$. Montrer que les zéros de y sont isolés.
- 2) Soient y, z deux solutions de $(*)$ non proportionnelles.
 - a) Montrer que y et z n'ont pas de zéros commun.
 - b) Montrer que si u, v sont deux zéros consécutifs de y , alors z possède un unique zéro dans l'intervalle $]u, v[$ (étudier z/y).

Exercice 45. $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right)y = 0$

Soit $\lambda > 0$ et y une solution de $y'' + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right)y = 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, y a un zéro dans l'intervalle $]a, a + \pi[$ (étudier $z = y'\varphi - y\varphi'$ où $\varphi(t) = \sin(t - a)$).

Exercice 46. $y'' + e^t y = 0$

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de $y'' + e^t y = 0$.

- 1) Montrer que l'ensemble des zéros de y est infini dénombrable.
- 2) On note a_n le n ème zéro positif de y .
En utilisant les fonctions $\varphi(t) = \sin\left(e^{a_n/2}(t - a_n)\right)$ et $\psi(t) = \sin\left(e^{a_{n+1}/2}(t - a_n)\right)$, montrer que $\frac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}} \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$.
- 3) Donner un équivalent de a_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 47. Conditions aux limites

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec f positive. Montrer qu'il existe une unique solution pour le problème aux limites : $y'' = f(t)y + g(t)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Exercice 48. Comparaison de solutions

Soient $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec : $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) < 0$. Soient $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'' + p(x)y' + q(x)y \leq z'' + p(x)z' + q(x)z \\ y(a) \leq z(a), y'(a) < z'(a). \end{cases}$$

Montrer que : $\forall x > a, y(x) < z(x)$.

Exercice 49. Système différentiel à coefficients positifs

Soit $A : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & (a_{ij}(t)) \end{cases}$ continue avec : $\forall t \geq 0, \forall i, j, a_{ij}(t) \geq 0$ et X une solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$. Montrer que si toutes les coordonnées de $X(0)$ sont positives ou nulles il en est de même pour $X(t)$ pour tout t (commencer par le cas strictement positif).

Exercice 50. $\int_0^{+\infty} \sin t/t \, dt$

Soit $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et prouver que f est continue.
- 2) Justifier : $\forall x > 0, f(x) + f''(x) = 1/x$.
- 3) Résoudre l'équation précédente par la méthode de variation des deux constantes.

On introduira : $C(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt$ et $S(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$

4) En déduire : $\forall x > 0, f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \, dt$.

5) En déduire : $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 51. *Intégrale fonction d'un paramètre*

On pose $f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} e^{itx} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Former une équation différentielle satisfaite par f . En déduire f .

Exercice 52. *Ulm MP* 2000*

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I .

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2(I) \text{ tq } f(a) = f(b) = 0\}$. On considère enfin l'opérateur $K : f \mapsto \frac{f''}{\Delta}$.

- 1) Montrer que $\text{Sp}(K) \subset]-\infty, 0[$.
- 2) Trouver un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
- 3) On suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x) \geq 1$ pour $x \geq 2$. Soit $\lambda < 0$.
 - a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle $f_\lambda'' = \lambda \Delta f_\lambda$, $f_\lambda(0) = 0$, $f_\lambda'(0) = 1$.
 - b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros ($x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$) et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 53. *Centrale MP 2001*

1) Soit f de classe \mathcal{C}^1 de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leq \int_0^\pi f'^2$.

Indication : prolonger f en une fonction impaire 2π -périodique.

- 2) Soit une fonction q de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $]-\infty, 1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe \mathcal{C}^2 s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''(t) + q(t)x(t) = 0$ est la fonction nulle.
- 3) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ et deux réels a, b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $x(0) = a$, $x(\pi) = b$ et $x''(t) + q(t)x(t) = f(t)$.

Exercice 54. *X MP* 2000*

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur \mathbb{R} : $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Trouver une condition nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur \mathbb{R} dont le produit vaut constamment un.

Exercice 55. *X MP* 2000*

Soit A continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit \mathbb{R}^+ , et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y' = AY$ valant X_0 en $t = 0$, on a pour tout $t \geq 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t) \geq 0$.

Exercice 56. *ENS MP 2002*

Soit une application A de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C}^n . Montrer qu'il existe X de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C}^n , solution de $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$.

Indication : commencer par le cas $n = 1$, A constante.

Exercice 57. X MP* 2003

- 1) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et $k > 0, t_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + k \int_{u=t_0}^t f(u) du$.
Montrer que : $\forall t \geq t_0, f(t) \leq g(t) + k \int_{u=t_0}^t e^{k(t-u)} g(u) du$.
- 2) Soient $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continues, $T > t_0, K > 0$ et $\eta > 0$ tels que : $\forall t \in [t_0, T], \|A(t)\| \leq K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leq \eta$.
On note M_0 (resp. N_0) la solution du problème de Cauchy : $M(t_0) = I, M'(t) = A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0) = I, N'(t) = B(t)N(t)$). Montrer que : $\forall t \in [t_0, T], \|M_0(t) - N_0(t)\| \leq e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)$.
- 3) On note X_0 (resp. Y_0) la solution du problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n : $X(t_0) = \alpha, X'(t) = A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0) = \alpha, Y'(t) = B(t)Y(t)$) où $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Quelle majoration a-t-on sur $\|X_0(t) - Y_0(t)\|$?

Exercice 58. $y' + y = \varphi$, Mines 2015

- 1) Soit l'équation différentielle $f' + f = \varphi$, avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Exprimer f en fonction de φ .
- 2) On suppose que φ^2 intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - a) Montrer que f est bornée.
 - b) Montrer que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - c) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- 3) Montrer que l'on a les mêmes résultats en supposant φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 59. $y'' + y = f$, Mines-Ponts 2015

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone admettant une limite finie à l'infini. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + y = f$ est bornée.

Exercice 60. Équation de Legendre, ENS 2015

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0$.

- 1) Montrer qu'il existe une solution particulière y_k continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que toutes les solutions de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont proportionnelles à y_k .

Exercice 61. Cauchy-Abel, X 2014

Soient $R > 0$ et $b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à R . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une unique série entière $a(z)$ de rayon de convergence au moins égal à R telle que $a(0) = \lambda$ et $\forall z \in D(0, R), a'(z) = b(z)a(z)$.

Exercice 62. Centrale 2014

Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont positives et $t \mapsto X(t)$ solution de $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est croissante sur \mathbb{R} . Que dire si A est antisymétrique ?

Exercice 63. Mines 2014

- 1) Montrer que les solutions de $y'' + e^x y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Trouver une solution bornée sur \mathbb{R} . Le sont-elles toutes ?

Exercice 64. Mines MP 2012

Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $y' - y = e^{-x^2}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$.

solutions

Exercice 1.

- 1) $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.
- 2) $y = \frac{C + \sin x}{x}$.
- 3) $y = -\cos x + \frac{\sin x + \lambda}{1+x}$.
- 4) $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.
- 5) $y = \lambda x^{4/3} - x$.
- 6) $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{3 \sin 2x - 6 \cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.
- 7) $y = \frac{\operatorname{argch}(1-2x) + \lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$
 $y = \frac{\arcsin(2x-1) + \mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$
 $y = \frac{-\operatorname{argch}(2x-1) + \nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.
- 8) $y = \frac{x-1}{2x} \arctan x + \frac{x+1}{2x} \left(\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda \right)$.
- 9) $y = \frac{x}{1-x^2} \left((1+x) \ln x + 1 + \lambda x \right)$.

Exercice 2.

- 1) $y = (x + a \cos x + b \sin x)e^x$.
- 2) $y = (ax + b)e^{2x} + 2xe^x$.
- 3) $y = e^{2x}(a \cos 3x + b \sin 3x) + 2 \cos 2x + \sin 2x$.
- 4) $y = \sin x \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \lambda \cos x + \mu \sin x$ (variation de la constante avec \sin).
- 5) $y = (\lambda + \ln |x|)e^{-x} + \mu e^{-2x}$.
- 6) $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P^{(2n)}(x)$.
- 7) $y = a \cos x + b \sin x$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou $y = \pm 1$.

Exercice 3.

- 1) $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.
- 2) $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \frac{2x^2 + 3}{16}$.
- 3) $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$.
- 4) $y = ax + bx^2 + 1 - 2x \sin x$.
- 5) $y = x^2 \ln |x+1| + \lambda \left(x^2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + x - \frac{1}{2} \right) + \mu x^2$.
- 6) $y = \frac{-1 + a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}{x^2}$.
- 7) $y = \lambda \sqrt{x^2 + 3} + \mu x - 1$.
- 8) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x) + b(x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

Exercice 4.

$$1) 2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0 \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0 \operatorname{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{Solution générale : } y = \begin{cases} a \cos u + b \sin u & \text{si } x \geq 0 \\ a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \text{ avec } u = |x|^{3/2}.$$

$$2) n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0 \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$\text{Solution générale : } y = \frac{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}{x}.$$

$$3) (2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{x}).$$

$$\text{Solution générale sur } \mathbb{R}^+ : u = a \operatorname{ch}(\sqrt{x}) + b \operatorname{sh}(\sqrt{x}).$$

$$4) n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0 \Rightarrow y = a_0(1-x^2)e^{-x^2/2} + a_1 z.$$

$$\text{Solution générale : } y = (1-x^2)e^{-x^2/2}(a + bF(x)) + bx \text{ avec } F(x) = \int_{t=0}^x e^{t^2/2} dt.$$

$$5) (n+2)(n+3)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = \frac{x - \operatorname{sh} x}{x^3}.$$

$$\text{Solution générale : } y = \frac{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + x}{x^3}.$$

$$6) na_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow y = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Solution générale : } y = \frac{ax + b(1+x \ln|x|)}{(1-x)^2}.$$

Exercice 5.

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}.$$

Cette série converge et définit une fonction de classe \mathcal{C}^4 solution de l'équation.

Unicité : les solutions de l'équation homogène sont combinaison de e^{jx} , e^{-jx} , e^{j^2x} et e^{-j^2x} donc non π -périodiques.

Exercice 6.

$$k \notin \mathbb{Z} : y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a \cos kx + b \sin kx.$$

$$k \in \mathbb{Z} : \text{remplacer } \frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)} \text{ par } \frac{x \sin kx}{2k^3}.$$

Exercice 7.

$$y = x + 1 + \lambda e^x \text{ ou } y = x - 1 + \lambda e^{-x}.$$

Exercice 8.

$$y = e^x - 1 \text{ si } x < 0 ; y = 1 - \cos x + \sin x \text{ si } 0 \leq x < \frac{3\pi}{2} ; y = e^{3\pi/2-x} - 1 \text{ si } x \geq \frac{3\pi}{2}.$$

Exercice 9.

$$4xz'' + 2z' + z = \frac{-1}{y^2} \left(4xy'' + 2y' - y - \frac{8xy'^2}{y} \right) = \frac{2}{y^3} (y^2 + 4xy'^2) \text{ donc } \frac{y'}{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{-4x}} \text{ et } y = \lambda \exp(\pm\sqrt{-x})$$

pour $x < 0$.

Résolution sans indication : on pose $x = \varepsilon t^2$ et $y(x) = z(t)$ d'où $\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon z = 0$.

Exercice 10.

$$1) g(x) = be^{-ax} + \int_{t=0}^x e^{a(t-x)} f(t) dt.$$

$$2) \int_{x=0}^X g(x) dx = \frac{b}{a}(1 - e^{-aX}) + \int_{t=0}^X \int_{x=t}^X e^{a(t-x)} f(t) dx dt = \frac{b}{a}(1 - e^{-aX}) + \int_{t=0}^X \frac{1 - e^{a(t-X)}}{a} f(t) dt$$

$$\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt.$$

Donc l'intégrale de g converge. On montre la convergence absolue par majoration élémentaire.

Exercice 11.

Comme deux solutions diffèrent par un multiple de e^{at} , il y en a au plus une de carré sommable. En s'inspirant de la formule de Duhamel, on essaye $y(t) = -\int_{s=t}^{+\infty} e^{a(t-s)} f(s) ds = -\int_{u=0}^{+\infty} e^{-au} f(t+u) du$. La deuxième intégrale converge car $u \mapsto e^{-au}$ et $u \mapsto f(t+u)$ sont de carrés intégrables et on vérifie avec la première intégrale que c'est bien une solution de $y' - ay = f$. De plus, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $y^2(t) \leq \int_{u=0}^{+\infty} e^{-2au} du \times \int_{u=0}^{+\infty} f^2(t+u) du \leq \frac{1}{2a} \int_{u=t}^{+\infty} f^2(u) du$. En particulier y^2 est bornée sur \mathbb{R} .

Ensuite, on a $yy' - ay^2 = yf \geq -\frac{1}{2}(ay^2 + f^2/a)$, d'où $\frac{a}{2}y^2 \leq \frac{1}{2a}f^2 + yy'$ et en intégrant :

$$\frac{a}{2} \int_{t=\alpha}^{\beta} y^2(t) dt \leq \frac{1}{2a} \int_{t=\alpha}^{\beta} f^2(t) dt + \frac{y^2(\beta) - y^2(\alpha)}{2}.$$

Ainsi, les intégrales $\int_{t=\alpha}^{\beta} y^2(t) dt$ sont bornées, ce qui prouve que $y \in L^2$.

Exercice 12.

- 1) $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}$, $y = (\gamma t + \beta)e^{2t}$, $z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}$.
- 2) $y = -1 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$, $z = -1 + \lambda(1 + \alpha)e^{\alpha t} + \mu(1 + \beta)e^{\beta t}$, $\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
- 3) $y = \frac{-9 \cos t - 13 \sin t}{25} + (at + b)e^{2t}$, $z = \frac{-4 \cos t - 3 \sin t}{25} + (at + a + b)e^{2t}$.
- 4) $x = (a + bt + ct^2)e^t$, $y = \left(a + \frac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t$, $z = \left(a - \frac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t$.
- 5) $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t}$,
 $y = \frac{1}{2}(-a + 5b + 3c) - 2(b+c)e^t + \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
 $z = \frac{1}{2}(a - 5b - 3c) + 3(b+c)e^t - \frac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.
- 6) $x = (at^2 + (a+b+\frac{1}{2})t + a+b+c)e^t$,
 $y = (at^2 + (b-a+\frac{1}{2})t + a+c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$,
 $z = (-at^2 + (a-b-\frac{1}{2})t - c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

Exercice 13.

$$y = (t^2 + 1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Rightarrow (t^2 + 1)x'' + 2tx' - 2x = 6t.$$

Résolution par DSE $\Rightarrow x = a(1 + t \arctan t) + bt + t \ln(1 + t^2)$, $y = a \arctan t + b + 1 + \ln(1 + t^2)$.

Exercice 16.

Dériver deux fois. $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{2} + \lambda \operatorname{sh} x + \mu \cos x$.

Exercice 17.

- 1) $z' + \frac{z}{\operatorname{th} x} = 0$.
- 2) $y = \frac{ax+b}{\operatorname{sh} x}$.

Exercice 18.

- 1) spectre = \mathbb{C} , $f_{\lambda}(t) = e^{-t^2/2} e^{\lambda t}$.
- 2) Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \Leftrightarrow f = af_{\lambda} + bf_{-\lambda}$.
 Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = (at + b)e^{-t^2/2}$.
- 3) $\Phi^2(y) = -2y \Leftrightarrow y = e^{-t^2/2}(a \cos(t\sqrt{2}) + b \sin(t\sqrt{2}))$.

Exercice 19.

- 1) $\lambda = n^2$: $P(X) = aX^n$.
- 2) $\lambda > 0$: $f(x) = \alpha x^{\sqrt{\lambda}} + \beta x^{-\sqrt{\lambda}}$.
 $\lambda = 0$: $f(x) = \alpha + \beta \ln x$.
 $\lambda < 0$: $f(x) = \alpha \cos(\sqrt{-\lambda} \ln x) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda} \ln x)$.
- 3) $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(x) = \alpha \exp \lambda (\arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)})$.

Exercice 20.

- 2) a) $\lambda = 2k, P = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$ pour $-n \leq k \leq n$.
 b) $\lambda = 0, P = \alpha X^{2n}$.
 c) $\lambda = 0, P = \alpha(X^2 + 1)^n$.

Exercice 21.

$$y = \int_{t=0}^x g(t) dt \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x} \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1 \pm \sqrt{2}}. \text{ Continuité en } 0 \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1 + \sqrt{2}}.$$

Exercice 22.

Étudier $e^{-A}(y-z), A' = a$.

Exercice 23.

Point de concours : $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Exercice 25.

- 2) Soient y_0 une solution particulière et y_1 une solution non nulle de l'équation homogène : $y_1(x) = e^{-A(x)}$ avec $A' = a$. Alors $y_0(x+T) = y_0(x) + \alpha y_1(x)$, et pour une solution y quelconque, $y = y_0 + \lambda y_1$:
 $y(x+T) - y(x) = (\alpha + \lambda(e^{-I} - 1))y_1(x)$ où $I = \int_{t=0}^T a(t) dt$.

Exercice 26.

$\lambda \neq 0$: $f(x) = a \sin(\alpha x), \alpha \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$
 $\lambda = 0$: $f = 0$.

Exercice 27.

$$f(1) = e^{-k} \int_{t=0}^1 g(t) e^{kt} dt.$$

Avec Cauchy-Schwarz on obtient $\int_{t=0}^1 (f'(t) + kf(t))^2 dt \geq \frac{2k}{1 - e^{-2k}} f(1)^2 = 9 \frac{2k}{1 - e^{-2k}}$.

Il y a égalité pour $f(t) = 3 \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^k - e^{-k}}$.

Exercice 28.

- 1) $u_n - u(t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} \int_{x=t_n}^t u'(x) dx dt$ et on majore l'intégrale interne par Cauchy-Schwarz.

- 2) $w + w'' = u'$ donc $w(t) = \int_{x=t_n}^t \sin(t-x)u'(x) dx + \alpha \cos t + \beta \sin t$ puis

$$\begin{aligned} \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} w(t) dt &= \int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} \int_{x=t_n}^t \sin(t-x)u'(x) dx dt \\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} \int_{t=x}^{t_n+2\pi} \sin(t-x)u'(x) dt dx \\ &= \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} u'(x)(\cos(t_n-t) - 1) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

et $\int_{t=t_n}^{t_n+2\pi} v(t) dt = w(t_n) - w(t_n + 2\pi) = - \int_{x=t_n}^{t_n+2\pi} \sin(t-x)u'(x) dx$.

Exercice 29.

1) Formule de Duhamel : $y(t) = -\int_{x=0}^t e^{t-x} f(x) dx + \lambda e^t$.

Par convergence dominée, l'intégrale tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ donc toutes les solutions de (E) sont bornées au voisinage de $-\infty$.

Pour $t \geq 0$ on a $y(t) = e^t \left(\lambda - \int_{x=0}^t e^{-x} f(x) dx \right)$ donc il y a au plus une valeur de λ telle que y soit éventuellement bornée au voisinage de $+\infty$, c'est $\lambda = \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$.

Pour ce choix on a : $|y(t)| = \left| \int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x} f(x) dx \right| \leq \int_{x=t}^{+\infty} |f(x)| dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

2)

$$\begin{aligned} \int_{t=a}^b |F(t)| dt &\leq \int_{t=a}^b \int_{x=t}^{+\infty} e^{t-x} |f(x)| dx dt \\ &\leq \int_{x=a}^b \int_{t=a}^x e^{t-x} |f(x)| dt dx + \int_{x=b}^{+\infty} \int_{t=a}^b e^{t-x} |f(x)| dt dx \\ &\leq \int_{x=a}^b (1 - e^{a-x}) |f(x)| dx + \int_{x=b}^{+\infty} (e^{b-x} - e^{a-x}) |f(x)| dx \\ &\leq \int_{x=-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \end{aligned}$$

donc F est intégrable. $F' = F - f$ est aussi intégrable et $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F'(t) dt = [F(t)]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 30.

Poser $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_{t=0}^x g(t) dt$ puis résoudre : $F(x) = x-1+G'(x)$, $G(x) = x-1+F'(x)$, $F(0) = G(0) = 0$.

On trouve $f(x) = g(x) = 1$.

Exercice 31.

1) thm de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2) $x \mapsto A(-x)$ et $x \mapsto -B(-x)$ sont solutions de (E) et vérifient les bonnes conditions initiales.

3) Résoudre $u''(x) + ku(x) = 2d \cos(x)u(x)$ par la formule de Duhamel.

Exercice 32.

2) Oui, $\text{Ker } u = \{0\}$.

3) Oui : si $g \in E$ alors $f = t \mapsto \int_{s=-\infty}^t e^{s-t} g(s) ds$ appartient à E et $f + f' = g$.

Exercice 33.

2) $u_p(x) = -\int_{t=0}^x p f(t) \text{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right) dt + \frac{\text{sh}(x/p)}{\text{sh}(1/p)} \int_{t=0}^1 p f(t) \text{sh}\left(\frac{1-t}{p}\right) dt$.

3) TCD : $u_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} -\int_{t=0}^x (x-t) f(t) dt + x \int_{t=0}^1 (1-t) f(t) dt = \int_{t=0}^x t(1-x) f(t) dt + \int_{t=x}^1 x(1-t) f(t) dt$ (primitive deuxième de $-f$ s'annulant en 0 et 1).

Exercice 34.

- 1) Il suffit de démontrer que les solutions de (\mathcal{E}) sont développables en série entière. La méthode des coefficients indéterminés donne $n(n-1)a_n = (\lambda-1)a_{n-4}$ si $n \geq 4$ et $a_2 = a_3 = 0$ d'où

$$a_{4k} = \frac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^k 4i(4i-1)}, \quad a_{4k+1} = \frac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^k 4i(4i+1)}, \quad a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0.$$

On obtient une série de rayon infini pour tout choix de a_0, a_1 donc les solutions DSE forment un ev de dimension 2 et on a ainsi trouvé toutes les solutions.

- 2) On doit avoir $H''(x) - 2xH'(x) + ((2-\lambda)x^2 - 1)H(x) = 0$. Si H est une fonction polynomiale non nulle, en examinant les termes de plus haut degré on obtient une contradiction. Donc il n'existe pas de telle solution.

Exercice 35.

Considérer $h(t) = a + \int_{u=0}^t f(u)g(u) du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t) \leq g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel.

Exercice 36.

$f(x) = \int_{t=0}^x g(t) \sin(x-t) dt + \lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $g = f + f''$.

Exercice 37.

On pose $\varphi(t) = f''(t) + f'(t) + f(t)$.

$$f(t) = e^{-t/2} \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \int_{u=0}^t \varphi(u) e^{u/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}(u-t)}{2}\right) du + A \cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) \right].$$

Exercice 39.

- 1) $y = \int_{t=\alpha}^x b(t) e^{A(t)-A(x)} dt + y(\alpha) e^{-A(x)}$ avec $A' = a$ et $A(\alpha) = 0$.

Comme $a \geq 1$, on a $A(x) \geq x - \alpha$ et $A(t) - A(x) \leq t - x$ pour $t \leq x$.

Donc $|y| \leq \int_{t=\alpha}^z |b(t)| e^{t-x} dt + \int_{t=z}^x |b(t)| e^{t-x} dt + |y(\alpha)| e^{\alpha-x} \leq \|b\|_{\infty} e^{z-x} + \sup_{[z, +\infty[} |b| + |y(\alpha)| e^{\alpha-x}$.

On choisit z tel que $z \rightarrow +\infty$ et $x - z \rightarrow +\infty \Rightarrow$ cqfd.

- 2) Comme $A(t) - A(x) \leq t - x$ pour $t \leq x$, l'intégrale $\int_{t=-\infty}^x b(t) e^{A(t)-A(x)} dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$. Comme $e^{-A(x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, c'est la seule.

Exercice 40.

- 1) Sinon, la convexité de y est incorrecte.
 2) S'il existe x tel que $z(x) = z'(x) = 0$, alors $z = 0$ ce qui est absurde.
 S'il existe x tel que $z(x) = 0 \neq z'(x)$, alors par convexité, z ne peut s'annuler ailleurs.

Exercice 42.

Si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées alors y_1' et y_2' sont intégrables donc $y_i'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $W_{y_1, y_2}(t) = 0$ pour tout t .

Exercice 43.

- 1) On suppose $y \neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé, donc la notion de zéros consécutifs est pertinente. Enfin, $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ sont de signes opposés sinon il existe un autre zéro dans $]x_0, x_1[$.
 2) $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$ (non simplifiable).
 3) Si z ne s'annule pas dans $]x_0, x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1) - W(x_0)$ si $z(x_0) \neq 0$ ou $z(x_1) \neq 0$.
 4) On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0, x_1[$ et en permutant les rôles de u et y , le prochain zéro éventuel de u vient après y_1 . Sinon, $u = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)} y$.

Exercice 44.

2) a) Wronskien.

b) $(z/y)' = (z'y - zy')/y^2$ est de signe constant $\Rightarrow z/y$ est monotone.
 z/y admet des limites infinies en u et v . TVI**Exercice 45.** $z' = -\frac{\lambda}{t^2} \sin(t-a)y(t)$ donc si y ne s'annule pas sur $]a, a+\pi[$, alors z est strictement monotone sur $[a, a+\pi]$. Mais $z(a+\pi) - z(a) = y(a+\pi) + y(a) \Rightarrow$ contradiction de signe.**Exercice 46.**

1) L'ensemble des zéros est localement fini d'après Cauchy-Lipchitz.

Si y ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$, par exemple $y > 0$, alors y est concave positive donc minorée, donc $y'' \rightarrow -\infty$ ce qui implique $y', y \rightarrow -\infty$, contradiction.3) Soit $b_n = \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Alors $b_{n+1} \leq 2 \ln \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} \right) \leq b_n$ et $b_n \rightarrow 0$ donc $b_n \sim b_{n+1} \sim 2 \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right)$.Alors $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, $b_n \sim \frac{1}{2n}$ et $a_n \sim 2 \ln n$.**Exercice 47.**Les formes linéaires $y \mapsto y(a)$ et $y \mapsto y(b)$ sont linéairement indépendantes sur l'espace des solutions de l'équation homogène.**Exercice 48.**On se ramène au cas $z = 0$. Soit x tel que $y(x) < 0$ et $y'(x) = 0$. Alors $y''(x) < 0$, donc y n'est pas minimale en x . Donc y n'a pas de minimum local sur $]a, +\infty[$.**Exercice 49.**Si $x_i(0) > 0$ pour tout i on obtient une contradiction en considérant le plus petit t tel qu'il existe i avec $x_i(t) < 0$.

Cas général : dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales. . .

Exercice 51.

$$f'(x) = \frac{x+i}{2(x^2+1)} f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x\right).$$

Exercice 52.1) Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda \Delta f$ avec $\lambda > 0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.2) $(f | g) = \int_{t=a}^b f'(t)g'(t) dt = - \int_{t=a}^b f''(t)g(t) dt = - \int_{t=a}^b f(t)g''(t) dt$.3) b) Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$.Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε , et on a $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$ d'où

$$f_\lambda(x) = \int_{t=A}^x \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t) dt + \alpha \cos(x\sqrt{-\lambda}) + \beta \sin(x\sqrt{-\lambda}).$$

En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\left(A + \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t) dt$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f'_\lambda(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Exercice 53.

1) Après le prolongement indiqué on peut appliquer le relation de Parseval à f et f' sachant que $c_0(f) = 0$ par imparité et $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leq |c_n(f')|$ pour $n \neq 0$.

2) $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = [xx']_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Rmq: il n'est pas nécessaire d'avoir q de classe \mathcal{C}^1 .

3) Il existe x_0 de classe \mathcal{C}^2 vérifiant l'équation différentielle. Par différence avec x_0 on se ramène au cas

$f = 0$ et il faut montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (x(0), x(\pi)) \end{cases}$ est bijective, en notant \mathcal{S}

l'espace des solutions de l'équation homogène $x'' + qx = 0$. Or φ est linéaire et est injective d'après la question précédente, c'est donc une bijection car $\dim \mathcal{S} = 2$.

Remarque : l'hypothèse f de classe \mathcal{C}^1 est inutile, continue suffit.

Exercice 54.

x et $1/x$ sont solution $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ donc une condition nécessaire est : $q(t) \leq 0$ et $q = -x'^2/x^2$ est de classe \mathcal{C}^1 . Réciproquement, supposons q négative de classe \mathcal{C}^1 et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)x$ alors sur tout intervalle I où q ne s'annule pas on a $x'' = r(t)x' + r'(t)x$ donc

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

donc une deuxième condition nécessaire est : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Ces deux conditions sont suffisantes si q est strictement négative.

Exercice 55.

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^t A(u)X_k(u) du$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geq 0$.

Exercice 56.

Pour $n = 1$ et $A(t) = a > 0$ on trouve après les incantations usuelles (équation homogène, variation de la constante et mise en forme de l'intégrale) que $X : t \mapsto \int_{u=0}^1 F(tu)u^{a-1} du$ est l'unique solution prolongeable en 0 et qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Pour $n = 1$ et A non constante, on trouve de même :

$$X(t) = \int_{u=0}^1 F(tu)u^{A(0)-1} \exp\left(\int_{v=t}^{tu} \frac{A(v) - A(0)}{v} dv\right) du$$

et l'on voit que X est \mathcal{C}^∞ en écrivant $\frac{A(v) - A(0)}{v} = \int_{w=0}^1 A'(vw) dw$.

Pour n quelconque et A constante : alors la fonction $X : t \mapsto \int_{u=0}^1 u^{A(0)-I} F(tu) du$ est l'unique solution prolongeable en 0, en convenant que $u^{A(0)-I} = \exp((A(0) - I) \ln(u))$ (l'intégrale converge en 0 car $u^{A(0)-I} = o(u^{\alpha-1} \ln(u)^n)$ pour tout $\alpha > 0$ minorant les parties réelles des valeurs propres de $A(0)$).

Pour A non constante, on met l'équation sous forme intégrale :

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t) \Leftrightarrow X(t) = \int_{u=0}^1 u^{A(0)-I} \{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\} du.$$

Soit $a > 0$ à choisir. Posons $E = \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{C}^n)$ et pour $X \in E$:

$$\Phi(X) = t \mapsto \int_{u=0}^1 u^{A(0)-I} \{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\} du.$$

On a facilement : $\Phi(X) \in E$ si $X \in E$ et Φ est contractante sur E pour $\|\cdot\|_\infty$ si a est choisi suffisamment petit. Donc l'équation $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$ admet une solution (unique) définie au voisinage de 0, et cette solution est prolongeable en une solution sur \mathbb{R} car le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique en dehors de 0. Par ailleurs, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \int_{u=0}^1 u^{A(0)-I} \{F(tu) - (A(tu) - A(0))X(tu)\} du,$$

ce qui montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que X est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} .

Exercice 57.

- 1) Poser $F(t) = \int_{u=t_0}^t f(u) du$ et résoudre l'inéquation différentielle $F'(t) \leq g(t) + kF(t)$ par la formule de Duhamel.
- 2)

$$\begin{aligned}
 M' = AM &\Rightarrow \|M'(t)\| \leq K \|M(t)\| \\
 &\Rightarrow \|M(t) - I\| \leq K \int_{u=t_0}^t \|M(u)\| du \\
 &\Rightarrow \|M(t)\| \leq 1 + K \int_{u=t_0}^t \|M(u)\| du \\
 &\Rightarrow \|M(t)\| \leq 1 + K \int_{u=t_0}^t e^{K(t-u)} du = e^{K(t-t_0)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M - N)' &= (A - B)M + B(M - N) \\
 &\Rightarrow \|(M - N)'(t)\| \leq \eta e^{K(t-t_0)} + (K + \eta) \|(M - N)(t)\| \\
 &\Rightarrow \|(M - N)(t)\| \leq \frac{\eta}{K} (e^{K(t-t_0)} - 1) + (K + \eta) \int_{u=t_0}^t \|(M - N)(u)\| du \\
 &\Rightarrow \|(M - N)(t)\| \leq \underbrace{\frac{\eta}{K} (e^{K(t-t_0)} - 1) + \frac{(K + \eta)\eta}{K} \int_{u=t_0}^t e^{(K+\eta)(t-u)} (e^{K(u-t_0)} - 1) du}_{= e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)}
 \end{aligned}$$

- 3) $X_0(t) = M_0(t)\alpha$ et $Y_0(t) = N_0(t)\alpha$, d'où $\|X_0(t) - Y_0(t)\| \leq e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)} - 1)\|\alpha\|$.

Exercice 58.

- 1) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}$. La variation de la constante donne ensuite $f(t) = \lambda e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^u \varphi(u) du$.
- 2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_0^t e^u \varphi(u) du \right| \leq \left(\int_0^t e^{2u} du \right)^{1/2} \left(\int_0^t \varphi^2(u) du \right)^{1/2} \leq e^t \left(\int_0^{+\infty} \varphi^2(u) du \right)^{1/2}$$

On en déduit que f est bornée sur \mathbb{R}^+ .

- b) On a $f^2 = f\varphi - ff'$, donc $\int_0^t f^2(u) du = \int_0^t f(u)\varphi(u) du - \frac{1}{2}(f^2(t) - f^2(0)) \leq \left| \int_0^t f(u)\varphi(u) du \right| + \frac{1}{2}f^2(0)$. On a donc $\int_0^t f^2(u) du \leq \left(\int_0^t f^2(u) du \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^2(u) du \right)^{1/2} + \frac{1}{2}f^2(0)$. Si f est nulle alors elle est de carré intégrable. Sinon il existe t_0 tel que $\int_0^{t_0} f^2(u) du > 0$. On a alors, pour tout $t \geq t_0$, $\left(\int_0^t f^2(u) du \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{+\infty} \varphi^2(u) du \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{f^2(0)}{\left(\int_0^{t_0} f^2(u) du \right)^{1/2}}$. On en déduit que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- c) On a $\frac{1}{2}f^2(t) = \frac{1}{2}f^2(0) + \int_0^t f(u)\varphi(u) du - \int_0^t f^2(u) du$. f et φ sont de carré intégrable, on en déduit que $f\varphi$ est intégrable (utiliser par exemple $|f\varphi| \leq \frac{1}{2}(f^2 + \varphi^2)$), on en déduit que $f^2(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$. Or f^2 est intégrable en $+\infty$, donc la limite de f^2 est nulle.

- 3) On a $\left| \int_0^t e^{-u-t} \varphi(u) du \right| \leq \int_0^t |\varphi(u)| du$, on en déduit que f est bornée sur \mathbb{R}^+ . f est bornée, φ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , donc $f\varphi$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On a $\int_0^t f^2(u) du \leq \frac{1}{2}f^2(0) + \int_0^t |f(u)\varphi(u)| du$, ce qui montre que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$. La relation $\frac{1}{2}f^2(t) = \frac{1}{2}f^2(0) + \int_0^t f(u)\varphi(u) du - \int_0^t f^2(u) du$ permet à nouveau de conclure que $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 59.

$y(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_{t=0}^x \sin(x-t)f(t) dt$ donc

$$y(x+2\pi) - y(x) = \int_{t=x}^{x+2\pi} \sin(x-t)f(t) dt = \int_{t=0}^{\pi} \sin(t)(f(x+2\pi-t) - f(x+\pi-t)) dt.$$

Lorsque f est croissante, on obtient $0 \leq y(x+2\pi) - y(x) \leq f(x+2\pi) - f(x)$ puis

$$0 \leq y(x+2k\pi) - y(x) \leq f(x+2k\pi) - f(x) \leq 2\|f\|_{\infty}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $y(x)$ est compris entre $m - 2\|f\|_{\infty}$ et $M + 2\|f\|_{\infty}$ où m, M sont le minimum et le maximum de $y|_{[0,2\pi]}$. On traite de même le cas où f est décroissante. L'hypothèse f de classe \mathcal{C}^1 n'a pas servi, il y a peut-être une solution plus simple ?

Exercice 60.

1) Il faut comprendre : continue sur \mathbb{R} , solution sur les trois intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$, $] 1, +\infty[$, et non identiquement nulle.

En posant $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on obtient $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n(n+1) - k(k+1))a_n$, ce qui donne une famille de solutions sur $] -1, 1[$ dépendant des deux paramètres a_0 et a_1 . On a donc un ensemble de solutions sur $] -1, 1[$ qui constitue un espace vectoriel de dimension 2 ; on les a toutes.

Comme k est entier, l'une des deux suites (a_{2p}) ou (a_{2p+1}) est presque nulle et la « demi-série » associée est en fait un polynôme solution de l'équation sur $] -1, 1[$ donc solution partout.

Remarque : y_k est à un facteur près le k -ème polynôme de Legendre.

2) Soit z_k l'autre « demi-série », avec un coefficient a_0 ou a_1 non nul. Alors (y_k, z_k) est une base de l'ensemble des solutions sur $] -1, 1[$ donc toute fonction y solution sur $[-1, 1]$ est combinaison linéaire de y_k, z_k sur $] -1, 1[$. On doit prouver que le coefficient devant z_k est nul, ce qui revient à prouver que z_k n'est pas de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 1 ou au voisinage de -1. Considérons le déterminant wronskien $w = \begin{vmatrix} y_k & z_k \\ y'_k & z'_k \end{vmatrix}$. On a $w' = \frac{2x}{1-x^2}w$, ce qui donne $w = \frac{w(0)}{1-x^2}$ avec $w(0) \neq 0$. Donc $|w| \xrightarrow{x \rightarrow \pm 1} +\infty$ et c'est forcément la faute à z_k .

Exercice 61.

En écrivant $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, on obtient $a_0 = \lambda$ et $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ce qui définit une unique suite (a_k) et donc prouve l'unicité de a . Il reste à vérifier que le rayon de convergence est supérieur ou égal à R .

Soient $0 < r < s < R$ et M tel que $|b_k s^k| \leq M$ pour tout k . En supposant $|a_k r^k| \leq M'$ pour $0 \leq k \leq n$, il vient $|a_{n+1} r^{n+1}| \leq M M' r s / (n+1)(s-r) \leq M'$ pour n assez grand. On règle M' de sorte que l'inégalité soit vraie lorsque n est petit ; il y a un nombre fini de valeurs à considérer.

Exercice 62.

On pose $\varphi(t) = \|X(t)\|^2$. Alors $\varphi'(t) = 2(X'(t)|X(t)) = 2(AX(t)|X(t))$. On écrit $A = PD^tP$ avec P orthogonale et D diagonale et on a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tYDY$, avec $Y = {}^tPX$, ou encore ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. on en déduit que, pour tout t , $\varphi'(t) \geq 0$. Si A est antisymétrique alors, pour tout X , $(AX|X) = -{}^tXAX = -(AX|X)$, donc $(AX|X) = 0$. Dans ce cas φ est constante. On peut montrer également lorsque A est antisymétrique que chaque courbe intégrale est contenue dans un hyperplan.

Exercice 63.

- 1) $y'y + e^{-x}y'y'' = 0$ donc $y^2 + e^{-x}y'^2 + \int_{t=0}^x e^{-t}y'^2(t) dt = \text{cste}$.
- 2) La fonction nulle est une solution bornée sur \mathbb{R} . Soit y une solution bornée : $|y| \leq M$. Alors $|y''| \leq Me^x$ donc y'' est intégrable au voisinage de $-\infty$ puis y' admet une limite finie en $-\infty$ et cette limite est nulle sans quoi y ne serait pas bornée. Par intégration de $|y''| \leq Me^x$ il vient $|y'| \leq Me^x$ et ainsi $L(y) = \lim_{-\infty} y$ existe et est finie.

Supposons $L(y) = 0$: on a alors $|y| \leq Me^x$ par intégration de la même relation pour y' , puis $|y''| \leq Me^{2x}$, d'où après deux intégrations, $|y| \leq \frac{1}{4}Me^{2x}$ et de proche en proche : $|y| \leq \frac{1}{n!^2}e^{nx}$ pour tous n et x . Ainsi, la relation $L(y) = 0$ implique $y = 0$.

Considérons alors l'ev E des solutions bornées : L est une forme linéaire injective sur cet ev d'où $\dim E \leq 1$. Comme l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est un ev de dimension 2, il existe des solutions non bornées.

Exercice 64.

La solution générale de $y' - y = e^{-x^2}$ est donnée par

$$y = \int_{t=0}^x e^{x-t}e^{-t^2} dt + \lambda e^x = e^x \left(\lambda + \int_{t=0}^x e^{-t-t^2} dt \right).$$

Comme $\int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t-t^2} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}-(t+\frac{1}{2})^2} dt$ est absolument convergente, toute solution tend vers 0 en $-\infty$. De plus,

$$y = e^x \left(\underbrace{\lambda + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t-t^2} dt}_{\text{cste}} - \underbrace{\int_{t=x}^{+\infty} e^{-t-t^2} dt}_{=o(1)} \right)$$

et $0 \leq e^x \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t-t^2} dt \leq \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc y tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si

$$\lambda = - \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t-t^2} dt.$$