Développements limités théoriques

Exercice 1. *DL de* $(\operatorname{ch} x)^{1/x}$

1) Montrer que $\dfrac{1}{x}\ln(\operatorname{ch} x)$ admet en $+\infty$ un développement limité généralisé à tout ordre.

2) En déduire le développement limité de $(\operatorname{ch} x)^{1/x}$ en $+\infty$ à un ordre n quelconque.

Exercice 2. *Théorème de division*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) On suppose que $f(x) = o(x^n)$.

a) Démontrer que : $\forall\ p \le n,\ f^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$, et : $\forall\ p < n,\ g^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$.

b) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ en 0.

2) Démontrer le même résultat dans le cas général.

3) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$. Montrer que f/g se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Exercice 3. *DL de* f^{-1}

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de valuation 1. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que :

$$\begin{cases} X = Q_n \circ P + R_n \\ \deg Q_n \le n < \mathrm{v}(R_n). \end{cases}$$

Application : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective telle que $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$. Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et donner les deux premiers termes.

Exercice 4. *DL de* $(1-e^x)^n$

Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.
En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ pour $p = 0, 1, \ldots, n+2$.

Exercice 5. *Approximation de* f''

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Chercher $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$.

Exercice 6. *Dérivation d'un DL d'ordre 2*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h^2)$.
Démontrer que f est deux fois dérivable en a et $f''(a) = 0$ (comparer $f'(a+h)$ aux taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, et entre $a+h$ et $a+2h$).
Étudier le cas où $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{Lh^2}{2} + o(h^2)$.

Exercice 7. $f(x+y)f(x-y) \le f^2(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \le f^2(x)$.
Montrer que : $\forall\ t \in \mathbb{R},\ f(t)f''(t) \le f'^2(t)$.

solutions

Exercice 1.

2) $e\left(1-\dfrac{\ln 2}{x}+\dfrac{\ln^2 2}{2!\,x^2}-\ldots+(-1)^n\dfrac{\ln^n 2}{n!\,x^n}\right)+o(x^{-n})$.

Exercice 3.

$f^{-1}(y)=\dfrac{y}{a_1}-\dfrac{a_2y^2}{a_1^3}+o(y^2)$.

Exercice 4.

$(1-e^x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^ke^{kx}=\sum_{p=0}^{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kk^p\right)\dfrac{x^p}{p!}+o(x^{n+2})$,

$(1-e^x)^n=(-x)^n\left(1+\dfrac{nx}{2}+\dfrac{n(3n+1)}{24}x^2+o(x^2)\right)$.