Développements limités implicites

Exercice 1. *tan*$(x) = x$

1) Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(n \in \mathbb{N})$.

2) Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?

3) Donner un DL de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n \to \infty$.

4) En reportant dans la relation trouvée en **2)**, obtenir un DL de x_n à l'ordre 2.

Exercice 2. *maximum de* $x \cos^n x$

On note $f_n(x) = x \cos^n x$. Soit $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n)$ soit maximal.

1) Existence et unicité de x_n ?

2) Chercher $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3) Montrer que $x_n^2 \sim \dfrac{1}{n}$ $(n \to \infty)$.

4) Trouver un équivalent de $f_n(x_n)$.

Exercice 3. *Développement asymptotique*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x} e^x$.

1) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si λ est assez grand, la droite d'équation $y = \lambda$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points d'abscisses $a < b$.

a) Montrer que $a \sim \dfrac{1}{\lambda}$, et $e^b \sim \lambda$ pour $\lambda \to +\infty$.

b) Chercher la limite de b^a quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4. *Polytechnique MP* 2000*

Soit $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$. Trouver la limite et un équivalent de la suite (x_n) en $+\infty$.

Exercice 5.

Soit u_n une suite réelle telle que pour tout n on ait $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 6. *Mines MP 2001*

Montrez que pour n entier $(n > 0)$ l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution positive x_n. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

Exercice 7. *Centrale MP 2001*

Pour tout n entier naturel non nul, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1) Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.

2) Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 8. *Mines 2017*

Soit pour $\lambda > 0$, $f_\lambda : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{-\lambda} \exp(1/x). \end{cases}$

Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f_\lambda(x) = 1$ et en donner un développement asymptotique à trois termes quand $\lambda \to +\infty$.

solutions

Exercice 1.

4) $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to\infty}$.

Exercice 2.

1) $f_n'(x) = 0 \iff \operatorname{cotan} x = nx$.

2) 0.

3) $x_n \tan x_n = \dfrac{1}{n}$.

4) $\ln\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right) > -\dfrac{1}{e} \Longrightarrow y_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{ne}}$.

Exercice 3.

2) b) $a \sim e^{-b} \Longrightarrow a\ln b > 0 \Longrightarrow b^a > 1$.

Exercice 4.

Existence et unicité de x_n par étude de f sur $[3, +\infty[$ (pour $x \le 3$ on ne peut pas avoir $0 < f(x) < 1$). On a facilement $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\ln(x_n - 2) = \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)\ln(x_n) \Longrightarrow \ln\Big(1 - \dfrac{2}{x_n}\Big) = -\dfrac{\ln(x_n)}{n} \Longrightarrow x_n\ln(x_n) \sim 2n \Longrightarrow x_n \sim \dfrac{2n}{\ln n}$.

Exercice 5.

$u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\Big(\dfrac{1}{n^6}\Big)$.

Exercice 6.

Existence et unicité de x_n par étude de la fonction $x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}^+$. On a clairement $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n = e^{x_n} + x_n$ d'où :

$$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) = x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}).$$

On en déduit $x_n \sim \ln n$. Écrivons $x_n = \ln n + y_n$:

$$0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n})$$

d'où $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim -\dfrac{\ln n}{n}e^{-y_n} \sim -\dfrac{\ln n}{n}$. Écrivons maintenant $y_n = -\dfrac{\ln n}{n} + z_n$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2}e^{-2y_n} + o\Big(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\Big) \\
&= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln^2 n}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

d'où $z_n \sim -\dfrac{\ln^2 n}{2n^2}$ et finalement, $x_n = \ln n - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{2n^2} + o\Big(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\Big)$.

Exercice 7.
2)

$$nx_n^n(x_n-1)=x_n^n+\frac{1}{2}\Longrightarrow f_{n+1}(x_n)=\frac{n+1}{n}\Big(x_n^{n+1}+\frac{x_n}{2}\Big)-x_n^{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{x_n^{n+1}}{n}+\frac{(n+1)x_n-n}{2n}>0$$
$$\Longrightarrow x_{n+1}<x_n.$$

Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge vers $\ell\geq 1$.

$0\leq x_n-1=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2nx_n^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\ell=1$.

Soit $y_n=n(x_n-1)=1+\dfrac{1}{2x_n^n}$. On a $f(y_n)=\dfrac{\ln(2(y_n-1))}{y_n}=-\dfrac{\ln x_n}{x_n-1}=-g(x_n)$ et f,g sont strictement coissantes sur $[1,+\infty[$ donc les suites (x_n) et (y_n) varient en sens contraire. On en déduit que la suite (y_n) décroît donc admet une limite $\lambda\geq 1$, soit $x_n=1+\dfrac{\lambda}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Alors $x_n^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^\lambda$ d'où $\lambda=1+\dfrac{1}{2e^\lambda}$.

Exercice 8.
$\ln(f_\lambda(x))=1/x-\lambda\ln(x)$, quantité strictement décroissante décrivant $]0,+\infty[$ quand x décrit $]0,+\infty[$. Donc l'équation $\ln(f_\lambda(x))=0$ admet une unique solution notée x_λ. Avec $\ln(f_\lambda(1))=1$, on a $x_\lambda>1$ et de plus si $\mu>\lambda$ alors $\ln(f_\mu(x_\lambda))=(\lambda-\mu)\ln(x_\lambda)<0$ donc $x_\mu<x_\lambda$. En conséquence, x_λ admet une limite $\ell\geqslant 1$ quand $\lambda\to+\infty$.

On a $\lambda x_\lambda\ln(x_\lambda)=1$ donc $x_\lambda\ln(x_\lambda)\sim 1/\lambda$. Ceci implique successivement

$$\begin{aligned}
&\ell=1,\\
&x_\lambda-1\sim 1/\lambda,\\
&x_\lambda=1+1/\lambda+o(1/\lambda),\\
&\lambda\ln(x_\lambda)=1/x_\lambda=1-1/\lambda+o(1/\lambda),\\
&x_\lambda=\exp(1/\lambda-1/\lambda^1+o(1/\lambda^2))=1+1/\lambda-1/(2\lambda^2)+o(1/\lambda^2).
\end{aligned}$$