

Calculs de limites par DL

Exercice 1. *Fonctions circulaires et hyperboliques*

- 1) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}$.
- 2) $\frac{\sin x \operatorname{sh} x - \tan x \operatorname{th} x}{\operatorname{sh}^4 x - \operatorname{th}^4 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}$.
- 3) $(\operatorname{ch} x)^\alpha - (\operatorname{sh} x)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$
- 4) $\frac{\exp(x^2) - \operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{(\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{ch} 2x - \cos 2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}$.
- 5) $(2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x \xrightarrow{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{\pi}$.
- 6) $\frac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} \xrightarrow{x \rightarrow 3/2} \frac{\pi}{12}$.
- 7) $\frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/3} -\sqrt{3}$.
- 8) $\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- 9) $\frac{1}{x} \ln \operatorname{ch} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 2. *Logarithme et exponentielle*

- 1) $\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.
- 2) $\frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \pm\infty$.
- 3) $\frac{x^a - a^x}{\log_a(x) - \log_x(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{a^{a+1} \ln a (1 - \ln a)}{2}$.
- 4) $\left(\frac{a^x + b^x}{1 + c^x} \right)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{a + b - c}{2} \right)$.
- 5) $\frac{x^{x^x}}{x^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Exercice 3. Exposants variables

- 1) $x^{\arcsin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$
- 2) $\frac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{x^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1.$
- 3) $(2 - x)^{\tan(\pi x/2)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} e^{2/\pi}.$
- 4) $(2 - x)^{\tan(\pi x/2)} \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} 1.$
- 5) $(\sin x + \cos x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e.$
- 6) $(\cos 2x - 2 \sin x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{-2}.$
- 7) $(\sin x)^{\tan x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 1.$
- 8) $(\tan x)^{\cos x / \cos 2x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/4} e^{-1/\sqrt{2}}.$
- 9) $(\tan x)^{\cos x / \cos 2x} \xrightarrow{x \rightarrow (\pi/2)^-} 1.$
- 10) $(\sin x)^{1/\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e.$
- 11) $(\ln x)^{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1.$
- 12) $(\ln x)^{\ln(e-x)} \xrightarrow{x \rightarrow e^-} 1.$

Exercice 4. Radicaux

- 1) $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\pi x/4)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$
- 2) $\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$
- 3) $\frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

Exercice 5. Sommes de cotangentes

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. CNS pour que $\sum_{k=1}^n a_k \cotan(kx)$ ait une limite finie en 0 ?

Exercice 6. $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} \right)^p$

On pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{1/p} \right)^p$.

Trouver : $v_p = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,p}$, $v = \lim_{p \rightarrow \infty} v_p$, $w_n = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{n,p}$ et $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

Exercice 7. Ensi P 91

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ où f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 8. Recherche de tangentes

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer la tangente pour $x = 0$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1) $y = \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$.

2) $y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}$.

3) $y = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$.

4) $y = (2e^x - e^{-x})^{1/x}$.

5) $y = \frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x}$.

6) $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$.

Exercice 9. Comparaison de fonctions

On pose : $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1 - 2 \sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$.

Préciser les positions relatives de \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g , \mathcal{C}_h , \mathcal{C}_k au voisinage de 0.

Exercice 10. Recherche d'asymptotes

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1) $y = \sqrt{x(x+1)}$.

2) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

3) $y = (x^2 - 1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.

4) $y = (x+1) \arctan(1 + 2/x)$.

5) $y = x \cdot \arctan x \cdot e^{1/x}$.

6) $y = e^{2/x} \sqrt{1+x^2} \arctan x$.

7) $y = \sqrt{x^2 - x} \exp \left(\frac{1}{x+1} \right)$.

solutions

Exercice 5.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = 0 \implies L = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Exercice 6.

$$v_p = \left(\frac{2^{1+1/p} - 1}{1 + 1/p} \right)^p, \quad w_n = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right), \quad v = w = \frac{4}{e}.$$

Exercice 7.

$$\sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0)}{2}. \quad \left(\text{Utiliser } |f(x) - xf'(0)| \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |f''(t)| \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \right)$$

Exercice 8.

1) $y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}.$

2) $y = -\frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360}.$

3) $y = -\frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360}.$

4) $y = e^3(1 - 4x + 16x^2).$

5) $y = -1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}.$

6) $y = \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} \right).$

Exercice 9.

$$h \leq k \leq g \leq f.$$

Exercice 10.

1) $y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x}.$

2) $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x}.$

3) $y = 2x - \frac{4}{3x}.$

4) $y = \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3x^2}.$

5) $y = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi/4 - 1}{x}.$

6) $y = \frac{\pi x}{2} + \pi - 1 + \frac{5\pi/4 - 2}{x}.$

7) $y = x + \frac{1}{2} - \frac{9}{8x}.$