

# Dérivées partielles

## Calcul

### Exercice 1. Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

- 1)  $f(x, y, z) = (x + z)^{y^z}$
- 2)  $f(x, y) = \min(x, y^2)$
- 3)  $f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$  si  $x \neq y$  et  $f(x, x) = g'(x)$ .

### Exercice 2. DL d'ordre 1

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$f(0, 1, 1) = 0, \quad \partial f / \partial x(0, 1, 1) = 1, \quad \partial f / \partial y(0, 1, 1) = 2, \quad \partial f / \partial z(0, 1, 1) = 3.$$

Peut-on déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)}$  ?

### Exercice 3. Simplification

Soit  $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}\right)$  et  $g(x, y) = \arctan x - \arctan y$ .

- 1) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Calculer les dérivées partielles premières de  $f$  et de  $g$ .
- 3) Simplifier  $f$  à l'aide de  $g$ .

### Exercice 4. Somme des angles d'un triangle

Sur quelle partie  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que  $f$  est constante lorsque  $x, y, z$  sont strictement positifs.

### Exercice 5. Intégrale fonction de paramètres

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \int_{t=0}^1 f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n) dt. \end{cases}$

Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer ses dérivées partielles.

### Exercice 6. Dérivées secondes composées

Soient  $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .

### Exercice 7. Les polynômes complexes sont harmoniques

Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto P(x + iy). \end{cases}$  Montrer que  $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0$ .

### Exercice 8. Laplacien en polaires

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , et  $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . On pose  $\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$  (laplacien de  $f$ ).

- 1) Calculer  $\partial g / \partial \rho$ ,  $\partial g / \partial \theta$ ,  $\partial^2 g / \partial \rho^2$ ,  $\partial^2 g / \partial \theta^2$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .
- 2) Exprimer  $\Delta f$  en fonction des dérivées de  $g$ .

**Exercice 9. Laplacien en sphériques**

Soient  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (x, y, z) \end{cases}$  avec  $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi, \end{cases}$  et  $F = f \circ \Phi$ .

Vérifier que :

$$(\Delta f) \circ \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.

**Exercice 10. Laplacien en dimension  $n$** 

Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^{n*}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On définit une application  $F$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $F(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$ .

Calculer le laplacien de  $F$  en fonction de  $f$ .

**Exercice 11. Les isométries conservent le laplacien**

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une isométrie pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

1) Montrer que la matrice jacobienne de  $\varphi$  est constante, égale à la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  de la partie linéaire de  $\varphi$ .

2) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$ .

**Exercice 12. Changement de variables affine**

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application affine.

1) Montrer que la matrice jacobienne,  $J$ , de  $\varphi$  est constante.

2) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour  $A \in \mathbb{R}^2$ , on note  $H_f(A) = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x^2(A) & \partial^2 f / \partial y \partial x(A) \\ \partial^2 f / \partial x \partial y(A) & \partial^2 f / \partial y^2(A) \end{bmatrix}$  (matrice Hessienne de  $f$ ). Montrer que :  $\forall A \in \mathbb{R}^2, H_{f \circ \varphi}(A) = {}^t J H_f(\varphi(A)) J$ .

**Exercice 13. Formule de Leibniz**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . Calculer  $\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$  en fonction des dérivées de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 14. DL d'ordre 2**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Démontrer que :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a, b) + \frac{1}{2} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (a, b) + o(h^2 + k^2).$$

**Exercice 15. Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  dont les dérivées secondes sont bornées :

$$\forall i, j, \forall A \in U, |\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(A)| \leq M.$$

1) Montrer que :  $\forall A, B \in U, |f(B) - f(A) - df_A(\overrightarrow{AB})| \leq \frac{M \|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}$ .

2) Montrer que :  $\forall A, B \in U, |f(B) - f(A) - df_C(\overrightarrow{AB})| \leq \frac{M \|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$  où  $C$  est le milieu de  $[A, B]$ .

**Exercice 16. Longueur d'un arc de courbe**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dont les dérivées partielles sont bornées sur  $U$  et  $I \ni t \mapsto M_t$  une courbe paramétrée dans  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour  $a, b \in I$  comparer les longueurs des arcs  $\widehat{M_a M_b}$  et  $f(\widehat{M_a} f(M_b))$ .

**Exercice 17.** *Mise en facteur de  $x$  et  $y$* 

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $(0, 0)$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0, 0) = 0$ .

1) Montrer qu'il existe  $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y).$$

2) Y a-t-il unicité de  $g$  et  $h$  ?

3) Généraliser au cas où  $U$  n'est pas convexe.

**Exercice 18.** *Fonctions convexes*

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est convexe lorsque :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que  $f$  est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque  $x \neq y$  et  $0 < t < 1$ .

1) On suppose que  $f$  est convexe.

a) Soient  $x \in U, h \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in [0, 1]$  tel que  $x - h \in U$  et  $x + h \in U$ . Montrer :

$$(1+t)f(x) - tf(x-h) \leq f(x+th) \leq (1-t)f(x) + tf(x+h).$$

b) Montrer que  $f$  est continue (raisonner sur le cas  $n = 2$  puis généraliser).

2) On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si pour tous  $(x, y) \in U$  on a :  $f(y) \geq f(x) + df_x(y-x)$ .  
Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque  $n = 2$ .

3) On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

a) Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $x \in U$  la forme bilinéaire symétrique  $d^2f_x$  est positive.

b) Si, pour tout  $x \in U, d^2f_x$  est définie positive, montrer que  $f$  est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fautive.

**Exercice 19.** *Caractérisation des isométries*

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f : E \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1) Montrer que  $f$  est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante (c'est-à-dire  $df_x = df_y$  pour tous  $x, y$ , égalité dans  $\mathcal{L}(E)$ ).

2) Soit  $X$  un ensemble non vide quelconque et  $\varphi : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant :

$$\forall x, y, z \in X, \varphi(x, y, z) = \varphi(y, x, z) = -\varphi(z, y, x).$$

Montrer que  $\varphi = 0$  (lemme des tresses).

3) On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $f$  est une isométrie de  $E$  pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout  $x \in E, df_x$  est une application orthogonale.

**Exercice 20.** *Différentiabilité de la norme*

Pour chacune des trois normes classiques sur  $\mathbb{R}^2$  dire en quels points elles sont différentiables.

**Exercice 21.** *Partiellement dérivable  $\Rightarrow$  continue ?*

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

1) Donner un exemple de fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ayant en tout point des dérivées partielles premières, mais discontinue en au moins un point.

2) Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ayant en tout point des dérivées partielles premières *bornées* sur  $U$ . Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 22. Mines MP 2001**

Soit une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le disque unité du plan, telle que son laplacien  $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$  soit nul.

- 1) Montrer  $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  ne dépend pas de  $r \in [0, 1]$ .
- 2) Calculer alors  $\iint_{D_r} f(x, y) dx dy$   $D_r$  étant le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r$ .

**Exercice 23. ENS MP 2002**

Soit  $n$  un entier  $> 0$ ,  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f(x) / \|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$ , et qu'en tout point la matrice hessienne de  $f$  est définie positive.

On pose  $g(y) = \sup\{x \cdot y - f(x), x \in \mathbb{R}^n\}$ . Étudier les propriétés de  $g$ .

**Exercice 24.  $\int \varphi \circ f$ , X MP\* 2004**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On y définit une norme par :  $\|f\| = \sqrt{\int_{t=0}^1 f^2(t) dt}$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\varphi''$  est bornée.

Pour  $f \in E$  on pose  $T(f) = \int_{t=0}^1 \varphi(f(t)) dt$ .

- 1) Montrer que l'application ainsi définie  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.
- 2) Montrer que  $T$  est différentiable en tout point.

**Thm de Schwarz et formes différentielles****Exercice 25. Contre-exemple au théorème de Schwarz**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^2$ . On pose pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = r^2 f(\theta)$  avec  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Calculer  $\partial g / \partial x(0, y)$  et  $\partial g / \partial y(x, 0)$  en fonction de  $f$ . En déduire les valeurs de  $\partial^2 g / \partial y \partial x(0, 0)$  et  $\partial^2 g / \partial x \partial y(0, 0)$ . Construire un exemple précis (donner  $g(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$ ) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

**Exercice 26. Contre-exemple au théorème de Schwarz (Centrale MP 2003)**

Soit  $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq 0$  et  $f(0, 0) = 0$ .

- 1) Étudier la continuité de  $f$  et de ses dérivées partielles premières sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Montrer que  $\partial^2 f / \partial x \partial y(0, 0) \neq \partial^2 f / \partial y \partial x(0, 0)$ .

**Exercice 27. Dérivées d'ordre  $k$  distinctes**

Trouver  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que les  $k + 1$  dérivées d'ordre  $k$  en  $(0, 0)$  soient distinctes.

**Exercice 28. Intégration de formes différentielles**

Déterminer les fonctions  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- 1)  $\partial f / \partial x = \frac{2+x}{y}, \partial f / \partial y = \frac{2+y}{x}$ .
- 2)  $\partial f / \partial x = \frac{1-y}{(x+y+1)^2}, \partial f / \partial y = \frac{2+x}{(x+y+1)^2}$ .
- 3)  $\partial f / \partial x = \frac{y^2}{(x+y)^2}, \partial f / \partial y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$ .
- 4)  $\partial f / \partial x = 2x + \frac{1}{y}, \partial f / \partial y = 2y - \frac{x}{y^2}$ .

**Exercice 29. Formes différentielles exactes**

Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que la forme différentielle  $\omega = f(y)(xe^y dx + y dy)$  soit exacte. Déterminer alors ses primitives.

**Exercice 30.**

Quelles sont les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que la forme différentielle :  $\omega = f(x, y) d(x^2 + y^2)$  soit exacte ?

**Exercice 31.**

Trouver les fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que la forme différentielle :

$$\omega = 2xz \, dx + f(y)g(z) \, dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dz \text{ soit exacte. Déterminer alors ses primitives.}$$

**Exercice 32.** *Équation associée à une différentielle exacte*

1) Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\partial f / \partial x(x, y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y} \text{ et } \partial f / \partial y(x, y) = \frac{\ln x}{xy^2}.$$

2) Application : Résoudre l'équation différentielle :  $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$ .

**Difféomorphismes et fonctions implicites****Exercice 33.** *Jacobien des fonctions symétriques*

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \end{cases}$$

où  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont les fonctions symétriques élémentaires de  $x_1, \dots, x_n$ . Calculer le déterminant jacobien de  $f$ .

**Exercice 34.** *Changement de variables*

On pose  $f(x, y) = (x + y, xy) = (u, v)$ . Montrer que  $f$  induit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  où  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  à préciser. Chercher l'expression de  $f^{-1}$  et vérifier que le produit des matrices jacobiniennes est égal à  $I$ .

**Exercice 35.** *Changement de variables*

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y). \end{cases} \text{ Montrer que } f \text{ induit un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ sur un ouvert à préciser.}$$

**Exercice 36.** *Mines MP 2010*

Soit  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x > y\}$  et  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ .

1) Montrer que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

2) Déterminer  $f(U)$ .

**Exercice 37.** *Application du thm des fonctions implicites*

On considère la courbe d'équation  $e^{x-y} = 1 + 2x + y$ . Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point  $(0, 0)$ .

**Exercice 38.** *Thm des fonctions implicites*

1) Montrer que l'équation :  $x^3 + y^3 - 3xy = 1$  définit au voisinage de 0 une fonction implicite :  $y = \varphi(x)$  telle que  $\varphi(0) = 1$ .

2) Donner le DL de  $\varphi$  en 0 à l'ordre 3.

**Exercice 39.** *Thm des fonctions implicites, Ensi P 91*

Montrer que l'égalité  $2e^{x+y} + y - x = 0$  définit  $y = \varphi(x)$  au voisinage de  $(1, -1)$ . Calculer  $\varphi'(1)$  et  $\varphi''(1)$ .

**Exercice 40.** *Équation implicite  $x \ln x = y \ln y$* 

Soit  $f(x, y) = x \ln x - y \ln y$  ( $x, y > 0$ ).

Pour  $k \in \mathbb{R}$ , on considère la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'équation  $f(x, y) = k$ .

1) Suivant la position de  $(a, b) \in \mathcal{C}_k$ , préciser l'orientation de la tangente à  $\mathcal{C}_k$  en  $(a, b)$ .

2) Dresser le tableau de variations de  $\varphi(t) = t \ln t$ .

3) Dessiner  $\mathcal{C}_0$ . (Étudier en particulier les points  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$  à l'aide de DL)

4) Indiquer l'allure générale des courbes  $\mathcal{C}_k$  suivant le signe de  $k$ .

**Exercice 41. Fonction implicite**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- 1) Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation  $y - zx = f(z)$  définit localement  $z$  fonction implicite de  $x$  et  $y$ .
- 2) Montrer que l'on a alors :  $\partial z / \partial x + z \partial z / \partial y = 0$ .

**Exercice 42. Équation fonction de deux paramètres**

Soit l'équation  $(*) \Leftrightarrow x^5 + \lambda x^3 + \mu x^2 - 1 = 0$ . Montrer qu'il existe un voisinage,  $V$ , de  $(0, 0)$  et  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} \varphi &\text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ \varphi(0, 0) &= 1 \\ \forall (\lambda, \mu) \in V, \varphi(\lambda, \mu) &\text{ est racine simple de } (*). \end{aligned}$$

Donner le DL à l'ordre 2 de  $\varphi$  en  $(0, 0)$ .

**Exercice 43. Changement de variable singulier, Matexo**

On considère la fonction de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même définie par  $f(x, y) = (u, v)$ , où

$$u(x, y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Calculer sa matrice jacobienne. Est-elle inversible localement ? Caractériser  $f(\mathbb{R}^2)$ .

**Exercice 44. Différentielle du déterminant**

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M & \longmapsto \det M. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que l'on a pour  $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $df_M(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(M)H)$ .

Application : soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\chi_M(X) = (-1)^n X^n + \dots + a_1 X + \det(M)$ . Exprimer  $a_1$  en fonction des cofacteurs de  $M$ .

**Exercice 45. Les racines d'un polynôme sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  des coefficients**

Soit  $U$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré  $n$  et à racines réelles simples.

- 1) Montrer que  $U$  est ouvert dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2) Pour  $P \in U$  on note  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  les racines de  $P$ . Montrer que l'application  $P \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exercice 46. Non injectivité locale de l'exponentielle**

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto \exp(M). \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et exprimer, pour  $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $df_M(H)$  sous forme d'une série.
- 2) Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que pour toutes matrices  $A, B \in V$  on a :  $\exp(A) = \exp(B) \Rightarrow A = B$ .
- 3) Trouver une suite  $(M_k)$  de matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  distinctes ayant même exponentielle et convergeant vers une matrice  $A$  (donc il n'existe pas de voisinage de  $A$  sur lequel la restriction de  $f$  est injective).
- 4) Donner de même un point de non injectivité locale dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 47. Difféomorphisme**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f : E \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\alpha > 0$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \forall h \in E, (df_x(h) \mid h) \geq \alpha \|h\|^2.$$

- 1) Montrer pour  $x, y \in E$  :  $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2$ . En déduire que  $f(E)$  est fermé.
- 2) Montrer que  $f(E)$  est ouvert puis que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $E$  sur  $E$ .

**Exercice 48. Difféomorphisme**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$  et  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + f(y), y - f(x)). \end{cases}$

Montrer que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 49. Contre-exemple au théorème de Leibniz**

On pose :  $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x \leq \sqrt{y} ; \\ 2\sqrt{y} - x & \text{si } y \geq 0 \text{ et } \sqrt{y} < x \leq 2\sqrt{y} ; \\ 0 & \text{si } y \geq 0 \text{ et } 2\sqrt{y} < x \text{ ou } x \leq 0 ; \\ -f(x, -y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$  et :  $F(y) = \int_{x=0}^1 f(x, y) dx$ .

Faire un dessin, vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Calculer  $F(y)$  pour  $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$ ,  $F'(0)$  et  $\int_{x=0}^1 \partial f / \partial y(x, 0) dx$ .

**Exercice 50. Centrale MP 2000**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $c > 0$  tels que, pour tous  $x, y$ ,  $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$ .

1) Montrer que pour tous  $x, h$ ,  $\|df_x(h)\| \geq c\|h\|$ .

2) Montrer que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $\mathbb{R}^n$  (pour la surjectivité on considèrera, si  $a \in \mathbb{R}^n$ , le minimum de  $\|f(x) - a\|^2$ ).

**Exercice 51. Mines MP 2001**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 1$  et  $|g'(x)| < 1$ . Soit  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\varphi(x, y) = (f(x) + g(y), f(y) + g(x))$ .

1) Montrer que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\varphi(\mathbb{R}^2)$ .

2) On suppose qu'il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|g'(x)| < k$  ; montrer que  $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 52. ENS MP 2002**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $|f(x)|/\|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$ . Prouver que  $\nabla f$  est surjective sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Équations aux dérivées partielles****Exercice 53. Solutions polynomiales**

Trouver les fonctions polynomiales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :  $x\partial f/\partial x + y\partial f/\partial y = 4f$ .

**Exercice 54.  $2\partial f/\partial x + 3\partial f/\partial y = 4f$** 

Résoudre l'équation  $2\partial f/\partial x + 3\partial f/\partial y = 4f$  avec la condition aux limites :  $f(t, t) = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) (étudier  $\varphi : t \mapsto f(a + bt, a + ct)$  avec  $a, b, c$  bien choisis).

**Exercice 55.  $\partial f/\partial x - \partial f/\partial y = cste$** 

Déterminer les applications  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\partial f/\partial x - \partial f/\partial y = a$  où  $a$  est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable :  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ .

**Exercice 56.  $x\partial f/\partial x = y\partial f/\partial y$** 

Résoudre sur  $(\mathbb{R}^{+*})^2$  :  $x\partial f/\partial x = y\partial f/\partial y$ , en posant  $u = xy$ ,  $v = x/y$ .

**Exercice 57.  $x\partial f/\partial x + y\partial f/\partial y = 2$** 

Soit  $U$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  :  $U = \{(x, y) \text{ tq } x > 0, y > 0\}$ . Trouver les applications  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant :  $x\partial f/\partial x + y\partial f/\partial y = 2$ . On utilisera le changement de variable :  $u = xy$ ,  $v = y/x$ .

**Exercice 58.  $x\partial f/\partial x = -y\partial f/\partial y$** 

Résoudre sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :  $x\partial f/\partial x = -y\partial f/\partial y$ , en posant  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

**Exercice 59.  $y\partial f/\partial x - x\partial f/\partial y = 2f$** 

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant :  $y\partial f/\partial x - x\partial f/\partial y = 2f$ . où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

On pose  $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ . Calculer  $\partial g/\partial \rho$ ,  $\partial g/\partial \theta$ , puis trouver  $f \dots$

1) Si  $U = \{(x, y) \text{ tq } x > 0\}$ .

2) Si  $U = \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 60.** *Ensi Physique P 94*

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :  $2xy\partial f/\partial x + (1 + y^2)\partial f/\partial y = 0$  en utilisant, par exemple, le changement de variable :  $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$  et  $y = \frac{u}{v}$ .

**Exercice 61.** *Fonctions homogènes*

Soit  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x, y) \neq (0, 0)\}$ , et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Montrer que  $f$  est positivement homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x\partial f/\partial x(x, y) + y\partial f/\partial y(x, y) = \alpha f(x, y).$$

On étudiera  $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ .

**Exercice 62.**

Résoudre l'équation :  $x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = \alpha(\alpha - 1)f$  où  $\alpha$  est un réel fixé,  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ .  
On posera  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

**Exercice 63.** *Équation d'ordre 2 à coefficients constants*

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*) \Leftrightarrow a\partial^2 f/\partial x^2 + b\partial^2 f/\partial x\partial y + c\partial^2 f/\partial y^2 = 0$$

où  $f$  est une fonction inconnue :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  distincts, fixés. On fait le changement de variable :  $u = x + \alpha y$ ,  $v = x + \beta y$ .

1) Écrire l'équation déduite de (\*) par ce changement de variable.

2) En déduire que l'on peut ramener (\*) à l'une des trois formes réduites :

$$(1) : \partial^2 g/\partial u\partial v = 0, \quad (2) : \partial^2 g/\partial u^2 = 0, \quad (3) : \partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0.$$

**Exercice 64.**  $x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ 

Trouver les applications  $f : (\mathbb{R}^{+*})^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant :

$$x^2\partial^2 f/\partial x^2 + 2xy\partial^2 f/\partial x\partial y + y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0.$$

On utilisera le changement de variables :  $u = xy$ ,  $v = x/y$ .

**Exercice 65.**  $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = y/x^3$ 

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto g(y/x). \end{cases}$

Trouver  $g$  telle que  $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = y/x^3$ .

**Exercice 66.**  $\partial^2 g/\partial x^2 - 4\partial^2 g/\partial y^2 = 1$ 

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On pose  $g(x, y) = f(2x + y, 2x - y)$ .

1) Calculer les dérivées partielles secondes de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .

2) Trouver  $f$  telle que  $\partial^2 g/\partial x^2 - 4\partial^2 g/\partial y^2 = 1$ .

**Exercice 67.**  $x^2\partial^2 f/\partial x^2 - y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ 

On considère l'équation aux dérivées partielles sur  $\Omega = (\mathbb{R}^{+*})^2$  :  $x^2\partial^2 f/\partial x^2 - y^2\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ .

Résoudre cette équation en posant  $u = xy$ ,  $v = x/y$ .

**Exercice 68.**  $f(\cos x / \operatorname{ch} y)$  harmonique

Soit  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On considère  $g : \begin{cases} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(\cos x / \operatorname{ch} y). \end{cases}$

Déterminer  $f$  pour que  $g$  vérifie :  $\partial^2 g/\partial x^2 + \partial^2 g/\partial y^2 = 0$ .



**Exercice 69.**  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$  préserve les fonctions harmoniques

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ .

Soit  $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto F(u, v) \end{cases}$  et  $f$  définie par :  $f(x, y) = F(u, v)$ .

Montrer que  $\partial^2 F / \partial u^2 + \partial^2 F / \partial v^2 = 0$  entraîne  $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0$ .

**Exercice 70.**  $x\partial^2 f / \partial x^2 + y\partial^2 f / \partial x \partial y + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial f / \partial x = y$

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $g(u, v) = f(uv, u + v)$ .

1) Calculer  $\partial^2 g / \partial u \partial v$ .

2) Résoudre l'équation :  $x\partial^2 f / \partial x^2 + y\partial^2 f / \partial x \partial y + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial f / \partial x = y$ .

**Exercice 71.**  $f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  tq  $\Delta f = -f$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $g(x, y, z) = f(r)/r$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Déterminer  $f$  de sorte que  $\partial^2 g / \partial x^2 + \partial^2 g / \partial y^2 + \partial^2 g / \partial z^2 = -g$ .

**Exercice 72.**  $x^4 \partial^2 f / \partial x^2 - \partial^2 f / \partial y^2 = 0$

1) Trouver les fonctions  $g : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u > v\} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant :

$$\partial / \partial u (g + v \partial g / \partial v) = \partial / \partial v (g + u \partial g / \partial u)$$

(penser au théorème de Poincaré).

2) Résoudre sur  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  l'équation :  $x^4 \partial^2 f / \partial x^2 - \partial^2 f / \partial y^2 = 0$  en posant  $u = y + \frac{1}{x}$ ,  $v = y - \frac{1}{x}$ .

### Extrémums locaux

**Exercice 73.** Étude de points critiques

Chercher les extrémums des fonctions  $f(x, y)$  suivantes :

1)  $3xy - x^3 - y^3$

2)  $-2(x - y)^2 + x^4 + y^4$

3)  $x^2 y^2 (1 + 3x + 2y)$

4)  $2x + y - x^4 - y^4$

5)  $\frac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)}$ ,  $x, y > 0$

6)  $xe^y + ye^x$

7)  $x(\ln^2 x + y^2)$ ,  $x > 0$

8)  $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$

9)  $MA + MB - MO$ ,  $O = \text{mil}(A, B)$

**Exercice 74.** Distances aux sommets d'un triangle

Soit  $A \in \mathbb{R}^p$  fixé et  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M & \longmapsto AM^2 \end{cases}$   $g : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M & \longmapsto AM \end{cases}$  (distance euclidienne).

1) Calculer les gradients de  $f$  et  $g$  en un point  $M$ .

2) Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan. Trouver les points  $M$  du plan réalisant le minimum de :

a)  $MA^2 + MB^2 + MC^2$ .

b)  $MA + MB + MC$ .

c)  $MA \times MB \times MC$ .

**Exercice 75.** Aire d'un triangle

Soit  $ABC$  un triangle de cotés  $a, b, c$ .

1) Calculer l'aire,  $S$ , de  $ABC$  en fonction de  $a, b, c$ .

2) Montrer que  $\frac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$  est maximal lorsque  $ABC$  est équilatéral.

**Exercice 76.** Centrale MP 2000

On considère un vrai triangle  $ABC$  et  $f$  la fonction définie par :  $f(M) = d(M, AB) \times d(M, AC) \times d(M, BC)$ . Montrer que  $f$  admet un maximum à l'intérieur du triangle  $ABC$ , et caractériser géométriquement le point  $M_0$  où  $f$  est maximale.

**Exercice 77. Loi de réfraction**

Soient dans  $\mathbb{R}^2$  :  $A = (0, a)$ ,  $B = (b, -c)$  et  $M = (x, 0)$  ( $a, b, c > 0$ ). Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée  $AMB$  à la vitesse  $v_1$  de  $A$  à  $M$  et  $v_2$  de  $M$  à  $B$ . On note  $\alpha_1 = (\vec{j}, \overrightarrow{MA})$   $\alpha_2 = (-\vec{j}, \overrightarrow{MB})$ .

- 1) Faire une figure.
- 2) Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque  $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$ .

**Exercice 78. Centrale MP 2001**

$D_1, D_2, D_3$  sont trois droites d'un plan portant les côtés d'un triangle équilatéral de côté  $a$ . On pose

$$\varphi : \begin{cases} D_1 \times D_2 \times D_3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (M, N, P) & \longmapsto MN + NP + PM. \end{cases}$$

Déterminer  $\min \varphi$  et les triplets  $(M, N, P)$  où ce minimum est atteint.

**Exercice 79. Centrale MP 2006**

$E$  désigne l'espace affine euclidien classique.  $D_1, D_2, D_3$  sont trois droites deux à deux non parallèles.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} D_1 \times D_2 \times D_3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (M_1, M_2, M_3) & \longmapsto \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 + \|\overrightarrow{M_2M_3}\|^2 + \|\overrightarrow{M_3M_1}\|^2. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  admet un minimum atteint pour un unique triplet.
- 2) Dans le cas où  $D_1, D_2, D_3$  sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, trouver ce triplet.

**Exercice 80. Ajustement linéaire**

Problème d'ajustement linéaire : Etant donné  $n$  couples de réels  $(x_i, y_i)$   $1 \leq i \leq n$ , on cherche une droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  telle que  $\mu(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$  soit minimal.

On note  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , et on suppose  $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$ .

- 1) Résoudre le problème.
- 2) Interpréter la relation  $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$  à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Exercice 81. Plus court chemin, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP\* 2005**

Déterminer le plus court chemin entre les pôles nord et sud d'une sphère en dimension 3.

**Exercice 82. Point non extrémal**

On pose pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{si } (x, y) \neq 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé et  $g_\theta(r) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Montrer que  $g_\theta$  admet un minimum local strict en  $r = 0$ .
- 3) Calculer  $f(x, x^2)$ . Conclusion ?

**Exercice 83. Centrale MP 2001**

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $E$  espace euclidien et  $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$ . Montrer que  $g$  admet un minimum et un maximum.

**Exercice 84. Centrale MP 2000**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\overline{\Omega}$  et  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ .

- 1) On suppose que  $\Delta u > 0$ . Montrer que  $\max_{(x,y) \in \overline{\Omega}} u(x, y) = \max_{(x,y) \in \overline{\Omega} \setminus \Omega} u(x, y)$ .
- 2) Même question en supposant seulement  $\Delta u \geq 0$ .
- 3) Soit  $0 < r_1 < r_2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}$ . On suppose que  $u$  est continue sur  $\overline{A}$ ,  $\mathcal{C}^2$  sur  $A$  et que  $\Delta u \geq 0$  sur  $A$ . On pose  $M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} (u(x, y))$ .

$$\text{Montrer que, pour tout } r_1 \leq r \leq r_2, M(r) \leq \frac{M(r_1) \ln(r_2/r) + M(r_2) \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Indication : la fonction  $v : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$  vérifie  $\Delta v = 0$ .

**Exercice 85. Extremums liés, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP\* 2005**

Soit  $B$  la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $B$  et  $x \in B$  tel que  $f(x) = \max\{f(y), y \in B\}$ .

Montrer que  $\nabla f(x) = \lambda x$  avec  $\lambda \geq 0$ .

solutions

**Exercice 2.**

$\lim = 3.$

**Exercice 3.**

2)  $\partial f/\partial x = \frac{\pm 1}{1+x^2}, + \text{ si } y > x, - \text{ si } y < x.$

$\partial f/\partial y = \frac{\pm 1}{1+y^2}, - \text{ si } y > x, + \text{ si } y < x.$

3) Pour  $y \geq x, f(x, y) = \frac{\pi}{2} + g(x, y),$  pour  $y \leq x, f(x, y) = \frac{\pi}{2} - g(x, y).$

**Exercice 6.**

$\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial u/\partial x \partial u/\partial y \partial^2 g/\partial u^2 + (\partial u/\partial x \partial v/\partial y + \partial u/\partial y \partial v/\partial x) \partial^2 g/\partial u \partial v + \partial v/\partial x \partial v/\partial y \partial^2 g/\partial v^2 + \partial^2 u/\partial x \partial y \partial g/\partial u + \partial^2 v/\partial x \partial y \partial g/\partial v.$

**Exercice 8.**

2)  $\Delta f = \partial^2 g/\partial \rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial g/\partial \rho + \frac{1}{\rho^2} \partial^2 g/\partial \theta^2.$

**Exercice 10.**

$\Delta F = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r).$

**Exercice 13.**

$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}.$

**Exercice 17.**

1)  $f(x, y) = \int_{t=0}^1 (x \partial f/\partial x(tx, ty) + y \partial f/\partial y(tx, ty)) dt.$

**Exercice 18.**

1) a) thm des trois cordes pour  $u \mapsto f(x + uh)$  sur  $[-1, 1].$

b) Soit  $\bar{B}_\infty(x, r) \subset U$  et  $y$  tel que  $0 < \|x - y\|_\infty \leq r.$  On note  $t = \|x - y\|_\infty/r$  et  $h = (y - x)/t.$  Alors  $y = x + th$  et  $\|x \pm h\| = r$  donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq t \max(|f(x + h) - f(x)|, |f(x - h) - f(x)|) \leq Mt$$

car la restriction de  $f$  aux côtés de  $\bar{B}_\infty(x, r)$  est bornée (fonction convexe en dimension 1).

2) La surface représentative de  $f$  est au dessus de ses plans tangents.

**Exercice 21.**

1)  $xy/(x^2 + y^2).$

2)  $f$  est lipschitzienne pour  $\| \cdot \|_\infty.$

**Exercice 22.**

1) On pose  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta), h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  et l'on a

$0 = \Delta f = \partial^2 g/\partial r^2 + \frac{1}{r} \partial g/\partial r + \frac{1}{r^2} \partial^2 g/\partial \theta^2$  d'où :

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) + \frac{1}{r^2} \left[ \partial g/\partial \theta(r, \theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

Le crochet est nul par  $2\pi$ -périodicité de  $g$  donc  $h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) = 0$  soit  $h'(r) = \frac{K}{r}$  et  $K = 0$  par continuité de  $h'$  en 0.

2)  $\pi r^2 f(0, 0).$

**Exercice 23.**

Remarques :

- la transformation  $f \mapsto g$  est appelée *transformation de Legendre*. On notera  $g = f^*$  ci-dessous.
- l'hypothèse «  $H_f$  est définie positive en tout point » implique que  $f$  est convexe.

**Étude d'un cas particulier :**  $f(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x | a) + \gamma$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ .

$$\text{Alors } (x | y) - f(x) = -\alpha \left\| x - \frac{y - \beta a}{2\alpha} \right\|^2 + \alpha \left\| \frac{y - \beta a}{2\alpha} \right\|^2 - \gamma$$

$$\text{d'où } f^*(y) = \alpha \left\| \frac{y - \beta a}{2\alpha} \right\|^2 - \gamma = \alpha^* \|y\|^2 + \beta^*(y | a) + \gamma^* \text{ avec } \alpha^* = 1/4\alpha, \beta^* = -\beta/2\alpha$$

et  $\gamma^* = \beta^2 \|a\|^2 / 4\alpha - \gamma$ . Ainsi,  $f^*$  a la même forme que  $f$ , et on vérifie immédiatement que  $f^{**} = f$ .**Cas général :** on montre que  $f^*$  est bien définie, vérifie les mêmes hypothèses que  $f$  et que l'on a  $f^{**} = f$ .1. Bonne définition de  $f^*$  : à  $y$  fixé on a  $(x | y) - f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} -\infty$  donc le sup existe et est un max,atteint en un point  $x$  tel que  $\nabla f(x) = y$ . Ce point  $x$  est unique : en effet, si  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  alors la fonction  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (h | \nabla f(x + th))$  est strictement croissante (définie-positivité de  $H_f$ ) ce qui implique  $\nabla f(x + h) \neq \nabla f(x)$ . Ainsi,

$$f^*(y) = (y | y^*) - f(y^*) \text{ avec } \nabla f(y^*) = y.$$

2.  $f^*$  est  $\mathcal{C}^2$  et  $H_{f^*}$  est définie-positive : d'après ce qui précède, la fonction  $\nabla f$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  ; sa différentielle est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  de matrice  $H_f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $f^*$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour  $y, h \in \mathbb{R}^n$  :

$$d(f^*)_y(h) = (\nabla f^*(y) | h) = (h | y^*) + (y | dy^*(h)) - (\nabla f(y^*) | dy^*(h)) = (h | y^*)$$

puisque  $\nabla f(y^*) = y$ . On en déduit :  $\nabla f^*(y) = y^*$ , puis  $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$ , matrice symétrique définie positive.3.  $f^*(y)/\|y\| \xrightarrow{\|y\| \rightarrow \infty} +\infty$  : soit  $a > 1$  et  $M_a = \sup\{f(x), \|x\| \leq a\}$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $x = ay/\|y\|$  on a  $f^*(y) \geq (x | y) - f(x) \geq a\|y\| - M_a \geq (a - 1)\|y\|$  si  $\|y\|$  est assez grand.4.  $f^{**} = f$  : car pour  $x \in \mathbb{R}^n$  on a  $f^{**}(x) = (x | y) - f^*(y)$  où  $y$  est défini par  $\nabla f^*(y) = x$ , c'est-à-dire  $y^* = x$  et donc  $f^{**}(x) = (y^* | y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$ .**Exercice 24.**

1) ???

2) On a pour  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $|\varphi(a + b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leq \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$ .Donc pour  $f, h \in E$  :  $|T(f + h) - T(f) - (h | \varphi' \circ f)| \leq \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty \|h\|^2$ , ce qui prouve que  $T$  est différentiable en  $f$  de différentielle  $h \mapsto (h | \varphi' \circ f)$ . On en déduit alors que  $T$  est continue en  $f$ .**Exercice 25.**

$$\partial g / \partial x(0, y) = -yf'(\pi/2), \partial g / \partial y(x, 0) = xf'(0).$$

**Exercice 26.**1)  $f$  est homogène de degré 2,  $\partial f / \partial x$  et  $\partial f / \partial y$  sont homogènes de degré 1, donc ces trois fonctions tendent vers 0 en  $(0, 0)$ . Ainsi  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .2)  $\partial^2 f / \partial x \partial y(0, 0) = 0$ ,  $\partial^2 f / \partial y \partial x(0, 0) = 1$ .**Exercice 28.**

1) pas de solution.

2)  $f(x, y) = \frac{y - 1}{x + y + 1} + \text{cste.}$

3)  $f(x, y) = \frac{xy}{x + y} + \text{cste.}$

4)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} + \text{cste.}$

**Exercice 29.**

$$f(y) = \lambda e^{-y}, F(x, y) = \lambda \left( \frac{x^2}{2} - (y+1)e^{-y} \right).$$

**Exercice 30.**

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2).$$

**Exercice 31.**

$$f(y) = y/k, g(z) = kz + \ell, F(x, y) = \left( x^2 + \frac{y^2}{2} \right) z + \frac{\ell y^2}{2k} + C.$$

**Exercice 32.**

$$1) f(x, y) = -\frac{\ln x}{xy} - \frac{1}{x}.$$

$$2) y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}.$$

**Exercice 33.**

$$\det(J_f) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

**Exercice 35.**

$$f(\mathbb{R}^3) = \{(u, v, w) \text{ tq } u + v > 0, ue^{2w} - v > 0\}.$$

**Exercice 36.**

1)  $\det(J_f(x, y)) = 2(y - x) < 0$  donc le théorème d'inversion locale s'applique :  $f(U)$  est ouvert. De plus  $f(x, y) = f(x', y') \Rightarrow (x + y = x' + y', xy = x'y') \Rightarrow \{x, y\} = \{x', y'\} \Rightarrow (x, y) = (x', y')$  compte tenu de  $U$ . Ainsi  $f|_U$  est injective et le théorème d'inversion globale s'applique.

2)  $f(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x + y = u, xy = \frac{1}{2}(u^2 - v))$ . Il y a des solutions distinctes si et seulement si  $v > \frac{1}{2}u^2$ , ce qui définit  $f(U)$ .

**Exercice 37.**

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow \text{tangente de pente } -\frac{1}{2}, \text{ au dessus.}$$

**Exercice 38.**

$$2) \varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

**Exercice 39.**

$$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}, \varphi''(1) = -\frac{8}{27}.$$

**Exercice 42.**

$$x = 1 - \frac{\lambda + \mu}{5} + \frac{\lambda^2 + \lambda\mu}{25} + o(\lambda^2 + \mu^2).$$

**Exercice 43.**

$x = \text{sh}(a), y = \text{sh}(b) \Rightarrow u = \text{sh}(a + b), v = \text{sh}(a + b) + \text{ch}(a + b)$ . donc  $f(\mathbb{R}^2)$  est inclus dans l'hyperbole d'équation  $v^2 - 2uv = 1$  et on doit avoir  $v \geq u$  ce qui donne la branche supérieure.

**Exercice 46.**

$$1) df_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (M^{k-1}H + \dots + HM^{k-1}).$$

3) les matrices  $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$  sont toutes semblables à  $M_\infty$  et ont même exponentielle  $I$ .

$$4) M_k = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi + 1/k \\ -4\pi^2/(2\pi + 1/k) & 0 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 50.**

2)  $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$  donc  $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^n$ . En ce point on a pour tout

$h \in \mathbb{R}^n : (f(x) - a \mid df_x(h)) = 0$  et  $df_x$  est surjective (linéaire injective en dimension finie) donc  $f(x) = a$ .

**Exercice 51.**

- 1)  $\det(J_\varphi(x, y)) = f'(x)f'(y) - g'(x)g'(y) > 0$  donc le théorème d'inversion locale s'applique, il suffit de vérifier l'injectivité de  $\varphi$ . Si  $\varphi(x, y) = \varphi(u, v)$  alors :

$$\begin{aligned} |x - u| &\leq |f(x) - f(u)| = |g(v) - g(y)| \leq |v - y| \\ |v - y| &\leq |f(v) - f(y)| = |g(x) - g(u)| \leq |x - u| \end{aligned}$$

d'où  $|x - u| \leq |x - u|$  et il y a inégalité stricte si  $v \neq y$  ce qui est absurde donc  $v = y$  et de même  $u = x$ .

- 2) On a  $\varphi(x, y) = (u, v)$  si et seulement si  $x = f^{-1}(u - g(y))$  et  $y = f^{-1}(v - g(f^{-1}(u - g(y)))) = h(y)$ .  $h$  est  $k^2$ -lipschitzienne donc le théorème du point fixe s'applique.

**Exercice 52.**

Si on il existe  $a \in \mathbb{R}^2$  telle que  $g : x \mapsto f(x) - (a | x)$  n'a pas de point critique, donc pas de minimum ni de maximum. On a aussi  $|g(x)|/\|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$  d'où  $\sup(g) = +\infty$  et  $\inf(g) = -\infty$ . Considérons pour  $r > 0$   $E_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|x\| \geq r\}$  :  $g(E_r)$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}$  donc un intervalle, et  $\sup(g(E_r)) = \sup(g) = +\infty$ ,  $\inf(g(E_r)) = \inf(g) = -\infty$ , d'où  $g(E_r) = \mathbb{R}$ . Ainsi il existe des  $x$  de normes arbitrairement grandes tels que  $g(x) = 0$  en contradiction avec la propriété  $|g(x)|/\|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} \infty$ .

Remarque : l'hypothèse  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est surabondante, la classe  $\mathcal{C}^1$  suffit à conclure.

**Exercice 54.**

$$f(x, y) = (3x - 2y)e^{4(x-y)}.$$

**Exercice 55.**

$$f(x, y) = \frac{a}{2}(x - y) + g(x + y).$$

**Exercice 56.**

$$f(x, y) = g(xy).$$

**Exercice 57.**

$$f(x, y) = \ln |xy| + g(y/x).$$

**Exercice 58.**

$$f(x, y) = g(\theta).$$

**Exercice 59.**

- 1)  $g(\rho, \theta) = \lambda(\rho)e^{-2\theta}$ .  
 2)  $g$  est  $2\pi$ -périodique, donc  $\lambda = 0$ , et  $f = 0$ .

**Exercice 60.**

$$f(x, y) = g\left(\frac{1+y^2}{x}\right).$$

**Exercice 62.**

$$f(x, y) = \rho^\alpha A(\theta) + \rho^{1-\alpha} B(\theta).$$

**Exercice 63.**

$$1) (a + b\alpha + c\alpha^2)\partial^2 g/\partial u^2 + (2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta)\partial^2 g/\partial u\partial v + (a + b\beta + c\beta^2)\partial^2 g/\partial v^2 = 0.$$

**Exercice 64.**

$$2u\partial^2 g/\partial u^2 + \partial g/\partial u = 0 \Rightarrow f(x, y) = A(x/y)\sqrt{xy} + B(x/y).$$

**Exercice 65.**

$$2tg'(t) + (1 + t^2)g''(t) = t \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}t + \lambda \arctan t + \mu.$$

**Exercice 66.**

- 1)  $\partial^2 g / \partial x^2 = 4\partial^2 f / \partial x^2 + 8\partial^2 f / \partial x \partial y + 4\partial^2 f / \partial y^2$   
 $\partial^2 g / \partial y^2 = \partial^2 f / \partial x^2 - 2\partial^2 f / \partial x \partial y + \partial^2 f / \partial y^2$   
 $\partial^2 g / \partial x \partial y = 2\partial^2 f / \partial x^2 - 2\partial^2 f / \partial y^2$ .
- 2)  $f(x, y) = \frac{xy}{16} + h(x) + k(y)$ .

**Exercice 67.**

$$2u\partial^2 g / \partial u \partial v - \partial g / \partial v = 0 \Rightarrow f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + h(xy).$$

**Exercice 68.**

$$(1 - t^2)f'' - 2tf' = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \mu.$$

**Exercice 69.**

$$\Delta f = 4(x^2 + y^2)\Delta F.$$

**Exercice 70.**

- 1)  $\partial^2 g / \partial u \partial v = uv\partial^2 f / \partial x^2 + (u + v)\partial^2 f / \partial x \partial y + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial f / \partial x$ .
- 2)  $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + h(u) + k(v)$  avec  $u + v = y$ ,  $uv = x$ .

**Exercice 71.**

$$f(r) = A \cos r + B \sin r.$$

**Exercice 72.**

- 1) Il existe  $G$  telle que  $\partial g / \partial u = g + u\partial g / \partial u = \partial(ug) / \partial u$  et  $\partial g / \partial v = g + v\partial g / \partial v = \partial(vg) / \partial v$ .  
 Donc  $G = ug + \varphi(v) = vg + \psi(u)$ , d'où  $g = \frac{\varphi(v) - \psi(u)}{v - u}$ . La réciproque est immédiate.
- 2)  $f(x, y) = x\left(\varphi\left(y - \frac{1}{x}\right) + \psi\left(y + \frac{1}{x}\right)\right)$ .

**Exercice 73.**

- 1)  $(0, 0)$  : non extrême  
 $(1, 1)$  : maximum local
- 2)  $(0, 0)$  : non extrême  
 $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  : minimum absolu
- 3)  $(-2/15, -1/5)$  : maximum local  
 $(x, 0)$  : max. local pour  $x < -1/3$ , min. local pour  $x > -1/3$   
 $(0, y)$  : max. local pour  $y < -1/2$ , min. local pour  $y > -1/2$
- 4)  $(2^{-1/3}, 4^{-1/3})$  : maximum absolu
- 5) prendre le log.  $(1, 1)$  : maximum absolu
- 6)  $(-1, -1)$  : non extrême
- 7)  $(1, 0)$  : minimum absolu  
 $(e^{-2}, 0)$  : non extrême
- 8)  $= MA + MB \Rightarrow$  minimum absolu sur  $[A, B]$
- 9)  $M \in \text{med}(A, B)$ ,  $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \pm \frac{2\pi}{3}$   
 $M = A, B$  : minimum absolu  
 $M = O$

**Exercice 74.**

- 2) a) isobarycentre de  $ABC$ .  
 b) Point de Fermat ou  $A, B, C$ .  
 c)  $A, B, C$ .

**Exercice 75.**

- 1)  $4S = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$ .
- 2)  $\max = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Exercice 76.**

Existence d'un maximum par compacité. Soient  $x, y$  les coordonnées d'un point  $M$  dans un repère orthonormé du plan et  $(u, v, w)$  les coordonnées barycentriques de  $M$  par rapport à  $A, B, C$  (avec  $u + v + w = 1$ ).  $u, v, w$  sont des fonctions affines de  $x, y, z$  et  $(AB)$  a pour équation barycentrique  $w = 0$  d'où  $d(M, AB) = \alpha|w|$  pour un certain réel  $\alpha > 0$ . De même pour  $d(M, AC)$  et  $d(M, BC)$  et  $f(M) = \alpha\beta\gamma|u||v||w|$ . Lorsque  $M$  varie dans le triangle,  $(u, v, w)$  décrit tous les triplets de réels positifs de somme 1 et on cherche le maximum du produit  $uvw$ , il est atteint quand  $u, v, w$  sont égaux, c'est-à-dire au centre de gravité du triangle.

**Exercice 78.**

Le minimum demandé existe car  $\varphi(M, N, P) \rightarrow +\infty$  quand l'un au moins des points  $M, N, P$  tend vers l'infini sur sa droite personnelle. Soient  $D_1 \cap D_2 = \{A\}$ ,  $D_2 \cap D_3 = \{B\}$ ,  $D_3 \cap D_1 = \{C\}$  et  $A', B', C'$  les milieux de  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ . Déjà on a  $\varphi(B', C', A') = \frac{3}{2}a$  et  $\varphi(A, N, P) \geq 2AP \geq a\sqrt{3}$  donc le minimum n'est pas atteint lorsque l'un des points  $M, N, P$  est confondu avec l'un des points  $A, B, C$ , ni non plus si l'un des points  $M, N, P$  est hors du triangle  $ABC$ . Pour  $N, P$  fixés hors de  $D_1$ , on fait varier  $M$  sur  $D_1 : M = A + t\overrightarrow{AB}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  et on considère  $f(t) = \varphi(M, N, P)$ . Alors  $f'(t) = \left( \overrightarrow{AB} \mid \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} + \frac{\overrightarrow{MP}}{MP} \right)$  donc  $f(t)$  est minimal lorsque  $D_1$  est la bissectrice extérieure des demi-droites  $[MN)$  et  $[MP)$ .

Soit  $(M, N, P)$  un triplet réalisant le minimum de  $\varphi$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles du triangle  $MNP$  en  $P, M$  et  $N$ . Les angles du triangle  $AMN$  sont  $\pi/3$ ,  $(\pi - \beta)/2$  et  $(\pi - \gamma)/2$  d'où  $2\pi/3 = \beta + \gamma = \pi - \alpha$  et donc  $\alpha = \pi/3 = \beta = \gamma$ . On en déduit que  $(MP)$  est parallèle à  $(AB)$ ,  $(MN)$  à  $(BC)$  et  $(NP)$  à  $(AC)$  puis que  $(M, N, P) = (B', C', A')$ .

**Exercice 79.**

1) On fixe  $A_i \in D_i$  et  $u_i$  un vecteur directeur de  $D_i$ . Soit  $M_i = A_i + x_i u_i$ . Alors

$$\begin{aligned} f(M_1, M_2, M_3) &= f(A_1, A_2, A_3) \\ &+ 2 \left( (\overrightarrow{A_1 A_2} \mid x_2 u_2 - x_1 u_1) + (\overrightarrow{A_2 A_3} \mid x_3 u_3 - x_2 u_2) + (\overrightarrow{A_3 A_1} \mid x_1 u_1 - x_3 u_3) \right) \\ &+ \left( \|x_2 u_2 - x_1 u_1\|^2 + \|x_3 u_3 - x_2 u_2\|^2 + \|x_1 u_1 - x_3 u_3\|^2 \right) \\ &= a + b(x_1, x_2, x_3) + c(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

$b$  est une forme linéaire et  $c$  est une forme quadratique positive, et même définie positive car  $u_1, u_2, u_3$  sont deux à deux non colinéaires. Il en résulte que  $f(M_1, M_2, M_3) \xrightarrow{|x_1|+|x_2|+|x_3| \rightarrow \infty} +\infty$ , donc par continuité,  $f$  admet un minimum.

Choisissons alors  $A_1, A_2, A_3$  de sorte que  $f(A_1, A_2, A_3)$  soit égal à ce minimum. On a alors  $b = 0$  car  $(A_1, A_2, A_3)$  est point critique de  $f$ , d'où  $f(M_1, M_2, M_3) > f(A_1, A_2, A_3)$  si  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$  vu la définie-positivité de  $c$ . Ceci prouve l'unicité du triplet où  $f$  atteint son minimum.

2) On soupçonne fortement le triplet constitué des milieux des côtés. En notant  $A_1, A_2, A_3$  ces milieux, il suffit de vérifier que la forme linéaire  $b$  de la réponse précédente est nulle, et c'est clairement le cas après regroupement autour de  $x_1, x_2, x_3$ .

**Exercice 81.**

On paramètre le chemin en coordonnées sphériques par  $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t))$ .

La longueur du chemin est  $\int_{t=0}^1 \sqrt{\varphi'^2(t) + \sin^2(\varphi(t))\theta'^2(t)} dt \geq \left| \int_{t=0}^1 \varphi'(t) dt \right|$  avec égalité si et seulement si  $\theta' = 0$  et  $\varphi'$  est de signe constant. On trouve donc les méridiens.

**Exercice 82.**

- 1)  $2x^4 y^2 \leq (x^4 + y^2)^2$ .
- 2)  $g_\theta(r) \sim r^2$ .
- 3)  $f(x, x^2) = -x^4$ . Donc  $(0, 0)$  n'est pas minimum local de  $f$ .



**Exercice 83.**

Il existe une base orthonormale de  $E$  et un réel  $\lambda$  tels que  $f(x) = \lambda x_1$  et  $g(x) = \lambda x_1 e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2}$ .  
 Donc  $g$  est maximale/minimale pour  $x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = \dots = x_n = 0$ .

**Exercice 84.**

- 1) Si  $u$  atteint son maximum en  $(x, y) \in \Omega$  alors  $d^2u(x, y)$  est négative, contradiction avec  $\Delta u(x, y) > 0$ .
- 2) Soit  $u_p(x, y) = u(x, y) + (x^2 + y^2)/p$  :  $\Delta u_p = \Delta u + 2/p > 0$  donc  $u_p$  relève du cas précédent.  
 On a  $\max_{\Omega} u + \frac{M}{p} \geq \max_{\Omega} u_p = \max_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} u_p \geq \max_{\overline{\Omega} \setminus \Omega} u$  et on passe à la limite.
- 3) Soit  $u_1(x, y) = u(x, y) + \alpha \ln(x^2 + y^2)$  où  $\alpha$  est tel que  $M_1(r_1) = M_1(r_2)$ ,  
 avec  $M_1(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} (u(x, y))$ . On a  $\Delta u_1 \geq 0$  d'où  $M_1(r) \leq M_1(r_1) = M_1(r_2)$  c'est-à-dire :

$$M(r) \leq M(r_1) + \alpha \ln(r_1/r) = M(r_2) - \alpha \ln(r/r_2) = \frac{M(r_1) \ln(r_2/r) + M(r_2) \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

**Exercice 85.**

Soit  $y \in B$  orthogonal à  $x$ . La fonction  $g : \theta \mapsto f(x \cos \theta + y \sin \theta)$  admet un extrémum en 0, donc  $g'(0) = 0$ , soit  $\nabla f(x) \perp y$ . Si  $x = 0$  on a donc  $\nabla f(0) = 0$ . Sinon,  $\nabla f(x) = \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et en faisant un développement limité de  $f(x - tx)$  on voit que  $\lambda \geq 0$ .