Dérivation

Exercice 1. *Limite double*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0 \text{ tq } \forall\,h,k \in\,]0,\delta[,\ \left|\frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 2. *Propriétés de parité et de périodicité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1) Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2) Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3) Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'est pas périodique (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 3. *Propriété de parité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la fonction $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire ?

Exercice 4. *Injectivité locale*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\,x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2) Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective. Donner un contre-exemple avec f' discontinue en a.

Exercice 5. *Dérivabilité de* $|f|$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Exercice 6. $f'(x) \to \ell$ *et* f *est bornée*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 7. $\lim_\infty f'(x) = \lim_\infty f(x)/x$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que $f(x)/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Chercher un contrexemple pour la réciproque.

Exercice 8. *Centrale MP 2006*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\int_{t=0}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) \sim \alpha x^{-\beta}$ en $+\infty$.

Exercice 9. *Propriété des valeurs intermédiaires pour* f'
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1) On suppose que : $\forall\,x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2) Dans le cas général, montrer que $f'([a,b])$ est un intervalle.

Exercice 10. *Propriété des valeurs intermédiaires pour* f'
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1) On note $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x,y) \in E$: $\varphi(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.
2) En déduire que $f'([a,b])$ est un intervalle.

Exercice 11. *Règle de l'Hospital*
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\, x \in\,]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.
1) Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel à choisir).
2) En déduire que si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (règle de l'Hospital).
3) Application : déterminer $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 12. *Recherche de limite*
Trouver $\lim_{x\to\pi/4} \dfrac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Exercice 13. $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ *il existe un autre zéro*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leqslant 0$.

Exercice 14. $f'(a) = f'(b)$
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Exercice 15. *Tangentes passant par un point donné*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point $(d,0)$.

Exercice 16. *Rolle itéré*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, n fois dérivable.
1) Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2) Si $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 17. *Rolle à l'infini*
Soit $f : [a,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$. Montrer qu'il existe $x \in\,]a,+\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

Exercice 18. *Formule des accroissements finis avec* $\theta = \frac{1}{2}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(\frac{a+b}{2})$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 19. *Fonction $\mathcal{C}^\infty$ bornée*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornée.
1) Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geqslant 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. *Distance à la corde*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d)$$

(considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$).
2) Cas général : Soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 21. *Écart à un polynôme interpolateur*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i. On pose $Q(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$.

Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b) f^{(n)}(c)$
(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

Exercice 22. *Polynômes de Legendre*
On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.
1) Montrer que : $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule exactement n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 23. *Racines de $x^n + ax + b$*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

Exercice 24. *Racines de $P(x) - e^x$*
Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x) = e^x$.

Exercice 25. *Limite de $1/(n+1) + \ldots + 1/(2n)$*
On veut calculer $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.
1) Montrer l'existence de ℓ.
2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f(\frac{1}{n+1}) + \ldots + f(\frac{1}{2n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell f'(0)$.
3) On prend $f(x) = \ln(1 + x)$. Déterminer ℓ.

Exercice 26. *Calcul de limite*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Chercher $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$.

Exercice 27. $\sum 1/k \ln k$
Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln(\ln x)$ sur $[k, k+1]$. En déduire que la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$ est divergente.

Exercice 28. $f'(x) f'(f(x)) = 1$
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) f'(f(x)) = 1,\ f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$.

Exercice 29. $f \circ f = f$
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou bien $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Exercice 30. *Dérivabilité uniforme*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, x, y \in [a,b],\ \text{si } 0 < |x-y| < \delta,\ \text{alors } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 31. *Formes indéterminées*
Soient $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $u - v$ ne s'annule pas et $\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} v(x) = a > 0$.
1) Chercher $\lim_{x\to 0} \dfrac{u^v - v^v}{u - v}$.
2) Chercher $\lim_{x\to 0} \dfrac{u^v - v^u}{u^u - v^v}$.

Exercice 32. $(1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$
1) Montrer que : $\forall\, x \geqslant -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2) Soit $k \in\ ]-1, 1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2)\dots(1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geqslant 0$, $k < 0$).

Exercice 33. *Dérivée n-ème de* $\cos^3 x$
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice 34. *Dérivée n-ème de* $\arctan x$ *et* e^{x^3}
Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :
$f : x \mapsto \arctan x$ et $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Exercice 35. *Dérivée n-ème de* $(x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$.

Exercice 36. *Dérivée n-ème*
Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37. *Dérivée n-ème de* $x^n(1-x)^n$
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 38. *Dérivées n-èmes de* $t^{n-1}\ln(t)$ *et* $t^{n-1}e^{1/t}$
Calculer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^{n-1}\ln t)$, et $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^{n-1}\exp(1/t))$ (essayer $n = 1, 2, 3$).

Exercice 39. *Dérivée n-ème de* $f(x^2)$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.
1) Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall\, x,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.
2) Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k.

Exercice 40. *Dérivée n-ème de* $f(1/x)$
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f(1/x)$.
Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}(1/x)$.

Exercice 41. *Dérivées de* e^{-1/x^2}
Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \exp(-1/x^2) \\ 0 & \longmapsto & 0. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

Exercice 42. $(f(2t) - f(t))/t$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\dfrac{f(2t) - f(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} a$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

Exercice 43. $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geqslant 0$

On pose $f(x) = \sin x - \dfrac{3x}{\pi} + \dfrac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

Exercice 44. *Courbes homothétiques*

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathcal{C}'$ celle d'équation : $y = a \ln x$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont une et une seule tangente commune.

2) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont homothétiques.

Exercice 45. *Matexo*

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x)f'(x) \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Exercice 46. $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ *(Centrale MP 2003)*

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Exercice 47. $f' = f^{-1}$ *(Ens Cachan MP* 2003)*

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ bijectives de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

1) Trouver un élément de E du type $x \mapsto cx^m$, où c et m sont réels.

2) Quelle est la limite en 0 de f ?

3) Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

4) Montrer que f admet un unique point fixe.

5) Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

Exercice 48. $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$, *Polytechnique MP* 2006*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que f est nulle.

Exercice 49. *Déterminant*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $x < y < z$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$.

Exercice 50. *Somme de fractions*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \ldots + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Exercice 51. *Monotonie*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'on a :

– soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.

– soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

– soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 52. *Fonction convexe bornée*

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 53. *f convexe majorée par g affine*

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ affine. On suppose : $\forall\, x > 0,\ f(x) \leqslant g(x)$ et $f(1) = g(1)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 54. *Position par rapport à une asymptote*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.

Exercice 55. *Fonction convexe dérivable*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer que f' est continue.

Exercice 56. *Étude à l'infini*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que : $f \geqslant 0,\ f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0$.
1) Étudier l'existence des limites (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x),\ f'(x),\ \dfrac{f(x)}{x}$.
2) Même question pour les limites en $-\infty$ de $f(x),\ f'(x)$, et $xf'(x)$.

Exercice 57. *Zéro de f''*
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f''(c) = 0$.

Exercice 58. $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall\, x,y \in [a,b],\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

Exercice 59. *Suites adjacentes*
Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ convexe, bijective, croissante. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 60. *Polygone inscrit dans un cercle de périmètre maximum*
Soit $n \geqslant 3$ et $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle fixé.
Montrer que le périmètre de ce polygone est maximal si et seulement si le polygone est régulier.

Exercice 61. *Fonctions logarithmiquement convexe*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : ($\ln f$ est convexe) $\Leftrightarrow$ ($\forall\, \alpha > 0,\ f^\alpha$ est convexe).

Exercice 62. *Limite de $f(x) - xf'(x)$*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.
1) Montrer que $p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2) On suppose p fini. En utilisant le fait que $f(x) - xf'(x)$ est bornée au voisinage de $+\infty$, montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite m finie en $+\infty$.
3) Montrer alors que $f(x) - mx - p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 63. *Fonction positive concave*
Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ concave.
1) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que : $\forall\, x,y \geqslant 0,\ f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Exercice 64. *Constante d'Euler*
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ concave, dérivable, croissante.
1) Montrer que : $\forall\, x \geqslant 1,\ f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) - f(x-1)$.
2) On pose : $\begin{cases} u_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n) \\ v_n = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) - f(n+1). \end{cases}$ Montrer que ces suites convergent.
3) On prend $f(x) = \ln x$. Soit $\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ (constante d'Euler). Calculer γ à 10^{-2} près.

Exercice 65. *Tangentes passant par un point*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par A.

Exercice 66. *Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$, $\exists\, !c \in \,]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est monotone sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.

2) En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

Exercice 67. *Taux d'accroissement symétrique, Mines MP 2012*

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

On suppose que, pour tout $x \in \,]a, b[$, $g(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$ existe.

1) Montrer que si $g > 0$ alors f est croissante.

2) Montrer que si $g \geqslant 0$ alors f est croissante. Montrer que si $g = 0$ alors f est constante.

Exercice 68. *Pseudo-dérivée seconde*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $D^2 f(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2}$ existe.

1) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer $D^2 f(x)$.

2) Soit f quelconque et $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$. Montrer qu'il existe $x \in \,]a, c[$ tq $D^2 f(x) \leqslant 0$.

On suppose à présent que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $D^2 f(x) \geqslant 0$.

3) Soient $a < b < c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a, b, c. Montrer que $P'' \geqslant 0$.

4) Calculer P'' en fonction de a, b, c et $f(a), f(b), f(c)$. En déduire que f est convexe.

Exercice 69. *Fonction convexe non dérivable sur un sous ensemble dénombrable*

Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|x - a_n|}{3^n}$.

Montrer que f est convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.

Exercice 70. *Convergence simple + convexité $\Rightarrow$ convergence uniforme sur un compact*

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $[a, b]$ convergeant simplement vers une fonction f supposée continue. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall\, x, y \in [a, b]$, $|x - y| \leqslant \dfrac{b - a}{p} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

On choisit un tel p, et on fixe une subdivision (a_k) de $[a, b]$ telle que $a_k = a + k\dfrac{b - a}{p}$.

2) Soit $t \in [0, 1]$. Encadrer $f_n(ta_k + (1 - t)a_{k+1})$ par deux fonctions affines de t en utilisant la convexité de f_n.

3) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 71. *DL d'une fonction convexe*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + o_{x\to 0}(x^2)$.

Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = c$

(encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x - \varepsilon x$, x et $x + \varepsilon x$).

Exercice 72. *DL d'une fonction convexe*

Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x) = x^2 + o_{+\infty}(x)$. Montrer que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.

Exercice 73. *Inégalité de Jensen, Centrale 2015*

1) Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, convexe. Montrer que $\Phi(x) = sup\{\Phi'(a)(x - a) + \Phi(a)\ , a \in \mathbb{R}^+\}$.

2) Soit h positive, continue par morceaux telle que $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et f positive, continue par morceaux. Montrer que $\Phi(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t)\,\mathrm{d}t) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(t))h(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $\left(\int_0^1 \dfrac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta)r\mathrm{d}r\right)^p \leqslant \int_0^1 \big(\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\big)r\mathrm{d}r$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue.

Exercice 74. *Convexité, ENS 2014*
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, h > 0,\ f(x) \leqslant \frac{1}{2h} \int_{t=x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 75. $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$, *Mines 2014*
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 76. *Fonctions sous-additives, Ens Cachan 2013*
Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est sous-additive si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

1) Montrer que toute fonction concave est sous-additive. La réciproque est-elle vraie ?

2) Montrer que, pour toute fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, il existe une fonction sous-additive maximale parmi les fonctions sous-additives inférieures à f.

3) Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{cases}$ Quelle est la fonction sous-additive maximale inférieure à g ?

Exercice 77. *Tétraèdre de volume minimal, X MP 2012*
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien on considère les points $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$, $C = (0,0,c)$ et $M = (d,e,f)$ où a,b,c sont des réels strictement positifs variables et d,e,f sont des réels strictement positifs fixés. Déterminer le volume minimal du tétraèdre $OABC$ sachant qu'il contient M.

Exercice 78. *Enveloppe convexe des dérivées, X 2010*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ et $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
On note $C = \mathrm{conv}(f'(]a,b[)$ le plus petit ensemble convexe contenant toutes les valeurs de f'. Le but de cet exercice est de montrer que $\lambda \in C$.
1) Traiter le cas où f est à valeurs réelles.
2) Dans le cas f à valeurs complexes, montrer qu'on peut se ramener au cas où $\lambda = 0$.
On suppose désormais $\lambda = 0$ et on raisonne par l'absurde : $0 \notin C$.
3) Soit $K = \bigcup_{\alpha>0} \alpha C$. Montrer que K est convexe et ne contient pas 0.
4) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + \pi$ et C est inclus dans le secteur angulaire de sommet 0 limité par les droites d'angles polaires α et β.
5) En considérant $g = \Re(e^{-i(\alpha+\beta)/2} f)$, obtenir une contradiction.

Exercice 79. *ENS 2017*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tq $P(n) = m^2$. On veut montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$.
1) A-t-on nécessairement $P \in \mathbb{Z}[X]$? On pourra remarquer que n^2+n est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $E = \mathcal{C}^\infty([a, +\infty[, \mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme $\mathit{\Delta}$ défini par

$$(\mathit{\Delta} f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, f \in E,\ \forall\, x \geqslant a,\ \exists\, \theta \in]0,1[\text{ tq } (\mathit{\Delta}^n f)(x) = f^{(n)}(x + n\theta).$$

On pourra procéder par récurrence sur n et remarquer que $\mathit{\Delta}$ commute avec la dérivation.
3) Conclure en considérant la fonction f définie pour x assez grand par $f(x) = \sqrt{P(x)}$.

solutions

Exercice 3.
Ctrex : $f(t) = t^2$ si $t \geqslant 0$ et $f(t) = -t^2$ si $t < 0$.

Exercice 8.
Poser $g(x) = \int_{t=0}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient $(g^3)'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3\ell^2$, ce qui implique (classiquement) que $g^3(x) \sim 3\ell^2 x$, puis $f(x) \sim \sqrt[3]{\dfrac{\ell}{3x}}$.

Exercice 12.
TAF $\Rightarrow \ell = \sqrt{2}$.

Exercice 18.
Dériver par rapport à a puis par rapport à b.

Exercice 22.
2) $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.

Exercice 26.
$\frac{1}{2} f'(0)$.

Exercice 28.
$f = \mathrm{id}$.

Exercice 31.
1) AF $\Rightarrow \exists\, w(x)$ compris entre $u(x)$ et $v(x)$ tel que $\dfrac{u^v - v^v}{u - v} = v w^{v-1} \to a^a$.
2) $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u - v)(v w_1^{v-1} - (\ln v) v^{w_2})$
$u^u - v^v = (u - v) w_3^{w_3}(1 + \ln w_2)$
$\Rightarrow \lim = \dfrac{1 - \ln a}{1 + \ln a}$.

Exercice 32.
2) Pour $k \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante et $\ln u_n \leqslant \dfrac{k}{1-k}$.
Pour $k < 0$, (u_{2n}) décroît et converge, et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Exercice 34.
$(1 + x^2) f^{(n+1)} + 2nx f^{(n)} + n(n-1) f^{(n-1)} = 0$ pour $n \geqslant 1$.
$g^{(n+1)} = 3x^2 g^{(n)} + 6nx g^{(n-1)} + 3n(n-1) g^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 35.
$(-1)^n e^{-x}(x^3 + (2 - 3n)x^2 + (3n^2 - 7n)x + (-n^3 + 5n^2 - 4n - 5))$.

Exercice 36.
$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\frac{\pi}{6})$.

Exercice 37.
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n(1-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} n!\, \binom{n}{k}^2 (-1)^{n-k} x^{n-k} (1-x)^k$.
coefficient de $x^n = (-1)^n n!\, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (-1)^n A_{2n}^n$.

Exercice 38.
$\dfrac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \dfrac{(-1)^n}{t^{n+1}} \exp(1/t)$.

Exercice 39.
1) $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + 2(2k - n) a_{n,k}$.
2) $a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Exercice 44.

1) Au point d'abscisse α tq $\ln\alpha = \dfrac{a\ln a}{1-a} + 1$ pour $\mathcal{C}$, et $\alpha' = a\alpha$ pour $\mathcal{C}'$.

2) Centre $= \left(0, \dfrac{a\ln a}{1-a}\right)$, rapport $= a$.

Exercice 45.

Si f change de signe, soit par exemple $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $a < b$ et $c = \sup\{x \text{ tq } f_{|[a,x]} \text{ est croissante}\}$. Alors f est croissante sur $[a, c]$ et $f(c) = 0$, contradiction.

Exercice 46.

Toute fonction linéaire $\varphi : x \mapsto ax$ convient. Réciproquement, si φ est solution alors $\varphi(0) = 0$. On note $a = \varphi'(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ est également solution et $\psi'(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\psi = 0$ et $\varphi(x) = ax$.

Exercice 47.

1) $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.

4) f et f' ont des limites nulles en 0^+ et infinies en $+\infty$ donc $f(x) = o_{x\to0^+}(x)$ et $x = o_{x\to+\infty}(f(x))$, ce qui implique que $f(x) - x$ s'annule sur $]0, +\infty[$. S'il y a deux points fixes, $a < b$, alors par le thm. des accroissements finis l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution dans $]0, a[$ et une dans $]a, b[$, en contradiction avec la bijectivité de $f' = f^{-1}$.

5) On note a le point fixe de f, b celui de g et on suppose $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a $g(x) < x$ pour $x \in]0, b[$ donc $g(a) < a = f(a)$. Par conséquent $g(x) < x \leqslant f(x)$ si $x \in [a, b[$; soit $]c, b[$ le plus grand intervalle sur lequel $g(x) < f(x)$. On a $0 \leqslant c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leqslant c$ et f, g sont strictement croissantes, donc $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$ pour $x \in]c, b[$. Ainsi $g - f$ est strictement croissante sur $]c, b[$ a une limite nulle en c^+ et est négative en b, c'est absurde.
Remarque : le point fixe est le nombre d'or m. De plus, si f et g sont deux éléments de E distincts alors $f - g$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de m^- (même démonstration).

Exercice 48.

On a $f' \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier elle admet des limites finies, a et b en $-\infty$ et $+\infty$ avec $-1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$.
Supposons $a > 0$: soit $\alpha \in]0, a[$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \leqslant x_0$, $f(x) \geqslant a - \alpha > 0$, d'où $f'(x) \leqslant -1 + \sqrt{a-\alpha} < 0$. Ceci est incompatible avec le caractère borné de f, donc on a en fait $a \leqslant 0$.
On montre de même que $b \geqslant 0$ et comme $b \leqslant a$, on a finalement $a = b = 0$.

Exercice 50.

$y_i = \dfrac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow \sqrt[n]{y_1 \ldots y_n} \leqslant \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

Exercice 56.

2) $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) \to 0$.
TAF entre x et $x/2 \Rightarrow 2(f(x) - f(x/2)) \leqslant xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow xf'(x) \to 0$.

Exercice 62.

1) Fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) $f(x) - xf'(x) = -x^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$. Donc, $x \mapsto \dfrac{f(x) - p}{x} \searrow$ et $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \nearrow$.

3) $p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$.

Exercice 63.

1) Soient $x < y$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geqslant \dfrac{f(y) - f(0)}{y - 0} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{f(y)}{y} + f(0)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$.

2) Pour $x < y$: $f(x + y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$ avec $t = \dfrac{x}{x - y} < 0$,

donc $f(x + y) - f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{xy}{x - y}\left(\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(y)}{y}\right) \leqslant 0$.

Exercice 67.

1) On suppose qu'il existe $a<c<d<b$ tels que $f(c)>f(d)$.
Soit $f(d)<m<f(c)$ et $A=\{t\in[c,d] \text{ tq } f(t)>m\}$. A est non vide car il contient c et, par continuité de f, un intervalle de la forme $[c,c+\eta[$. On pose alors $\alpha=\sup A$. On a clairement $\alpha\geqslant c+\eta>c$. Il existe une suite (h_n) de réels >0 telle que $h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et, pour tout n, $\alpha-h_n\in A$. On en déduit que $\alpha<d$. Pour n suffisamment grand, $\alpha+h_n<d$. On a alors $\dfrac{f(\alpha+h_n)-f(\alpha-h_n)}{2h_n}<0$ et donc, en passant à la limite, $g(\alpha)\leqslant 0$, ce qui contredit $g>0$. On en déduit que f est croissante.

2) Soit $\varepsilon>0$. On pose $f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon x$. On voit que $g_\varepsilon(x)=g(x)+\varepsilon>0$. On en déduit que f_ε est croissante pour tout $\varepsilon>0$. Soit $x\leqslant y\in[a,b]$. On a $f(x)+\varepsilon x\leqslant f(y)+\varepsilon y$. Cela est vrai pour tout $\varepsilon>0$, on en déduit que f est croissante. Si $g=0$ on obtient que f et $-f$ sont croissantes. Par conséquent f est constante.

Exercice 68.

2) Prendre x tel que $f(x)$ soit maximal.

Exercice 69.

Pour a_0 : $\bigl|f(a_0+h)-f(a_0)-|h|\bigr|\leqslant\dfrac{|h|}{2}$.

Exercice 72.

Soit $F(x)=x^2+xG(x)$. On a pour $h>0$:

$$f(x)\leqslant\frac{F(x+xh)-F(x)}{xh}=2x+xh+\frac{G(x+xh)-G(x)}{h}+G(x+xh).$$

Soit $\varepsilon>0$ et A tel que $y\geqslant A\Rightarrow|G(y)|\leqslant\varepsilon^2$. On prend $h=\varepsilon/\sqrt{x}$ et on obtient $f(x)-2x-\varepsilon\sqrt{x}\leqslant\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2$ d'où $f(x)\leqslant 2x+o(\sqrt{x})$. L'inégalité inverse se montre de même.

Exercice 73.

1) Le graphe de Φ est au-dessus de chacune de ses tangentes. La borne supérieure est un maximum (il suffit de prendre $a=x$).

2) On pose $a=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$. On a pour tout $s\in[-\pi,\pi]$, $\Phi(f(s))\geqslant\Phi(a)+\Phi'(a)(f(s)-a)$, puis $\Phi(f(s))h(s)\geqslant\Phi(a)h(s)+\Phi'(a)(f(s)-a)h(s)$. On intègre cette inégalité entre $-\pi$ et π. On obtient $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(f(s))h(s)\,\mathrm{d}s\geqslant\Phi(a)\int_{-\pi}^{\pi}h(s)\,\mathrm{d}s+\Phi'(a)\int_{-\pi}^{\pi}(f(s)-a)h(s)\,\mathrm{d}s$ ou encore, en utilisant $\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\,\mathrm{d}t=1$ et $a=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(f(s))h(s)\,\mathrm{d}s\geqslant\Phi(a)=\Phi(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)h(t)\,\mathrm{d}t)$.

Exercice 74.

Si f est convexe, $\int_{t=x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^{h}(f(x-t)+f(x+t))\,\mathrm{d}t\geqslant\int_{t=0}^{h}2f(x)\,\mathrm{d}t=2hf(x)$.

Si f n'est pas convexe, soient $a<b<c$ tels que $f(b)>\frac{c-b}{c-a}f(a)+\frac{b-a}{c-a}f(c)$. Pour $t\in[a,c]$ on pose $g(t)=f(t)-\frac{c-t}{c-a}f(a)-\frac{t-a}{c-a}f(c)$ (distance à la corde entre a et c). g est continue, nulle en a et c et strictement positive en b. Soit $m=\max(g)$ et $x=\min(g^{-1}(m))$ qui existe en tant que minimum d'un compact non vide. Donc $g(x)=m$, $x\in\,]a,c[$, et on a :

$$\forall t\in[a,x[,\ g(t)<m\qquad\forall t\in[x,c],\ g(t)\leqslant m.$$

Il en résulte, pour $h>0$ assez petit : $\dfrac{1}{2h}\int_{t=x-h}^{x+h}g(t)\,\mathrm{d}t<g(x)$ soit $\dfrac{1}{2h}\int_{t=x-h}^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t<f(x)$.

Exercice 75.

$f^2+(1+f')^2\leqslant 1$, donc, pour tout x, $f'(x)\leqslant 0$. Pour tout x, $f(x)\geqslant -1$. Donc f est décroissante et minorée, elle admet une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Supposons $\ell\neq 0$, alors pour x assez grand $((1+f'(x))^2\leqslant 1-\dfrac{\ell^2}{2}<1$. On en déduit que, pour x assez grand, $f'(x)\leqslant\sqrt{1-\dfrac{\ell^2}{2}}-1$ puis que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$, ce qui est impossible. On en déduit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 76.

1) f est concave donc la fonction, définie sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ est décroissante. Soit $x, y > 0$. On a $\dfrac{f(x+y)-f(0)}{x+y} \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ et $\dfrac{f(x+y)-f(0)}{x+y} \leq \dfrac{f(y)-f(0)}{y}\cdot$ On en déduit $(x+y)(f(x+y)-f(0)) \leq (x+y)(f(x)+f(y)-2f(0))$, et donc $f(x+y) \leq f(x)+f(y)-f(0) \leq f(x)+f(y)$. La fonction $E(x)$ est sous-additive mais n'est pas concave.

2) La fonction nulle est sous-additive et est inférieure à f.
On pose $h(x) = \sup(g(x),\ g$ sous-additive inférieure à $f)$. Soit $x, y \geq 0$. Pour tout g, $g(x+y) \leq g(x)+g(y) \leq h(x)+h(y)$. On en déduit $h(x+y) \leq h(x)+h(y)$. Pour tout g, $g \leq h$, donc h est bien sous-additive maximale parmi les fonctions sous-additives inférieures à f.

3) Soit g sous-additive telle que, pour tout x, $g(x) \leq x^2$.
Pour tout x, $g(x) = g(n\dfrac{x}{n}) \leq ng(\dfrac{x}{n}) \leq n\dfrac{x^2}{n^2} = \dfrac{x^2}{n}\cdot$ Cela est vrai pour tout $n \geq 1$, on en déduit que g est nulle.

Exercice 77.

Le volume vaut $abc/6$ et la contrainte est $d/a + e/b + f/c \leqslant 1$. Notons $\alpha = d/a$, $\beta = e/b$, $\gamma = f/c$. On veut maximiser le produit $\alpha\beta\gamma$ lorsque α, β, γ varient de sorte que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 1$.

A β, γ fixés, le produit est maximal quand α l'est, soit $\alpha = 1-\beta-\gamma$, donc on veut maximiser $(1-\beta-\gamma)\beta\gamma$. A γ fixé, le produit est maximal quand $1-\beta-\gamma = \beta$ (fait connu ou étude élémentaire d'une fonction du second degré), soit $\beta = (1-\gamma)/2$, et il ne reste plus qu'à maximiser $\gamma(1-\gamma)^2/4$ quand γ varie dans $]0,1]$. En dérivant logarithmiquement il vient $1/\gamma - 2/(1-\gamma) = 0$, d'où $\gamma = \frac{1}{3}$ puis $\beta = \frac{1}{3}$ et $\alpha = \frac{1}{3}$. En revenant aux variables de l'énoncé, le tétraèdre de plus petit volume contenant M est donné par $a = 3d$, $b = 3e$, $c = 3f$. Son volume est $\frac{27}{6}def$ et M est l'isobarycentre de A, B, C.

Exercice 78.

1) Avec la formule des accroissements finis, on a $\lambda \in f'(]a,b[) \subset C$.

2) On pose $g(t) = f(t) - \lambda t$. Donc $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - \lambda = 0$. Si l'on admet que $0 \in \mathrm{conv}(g'(]a,b[)$ alors $\lambda \in \mathrm{conv}(g'(]a,b[)+\lambda) = C$.

4) $K \cap \mathbb{U}$ est une partie de $\mathbb{U}$, connexe, non vide, et distincte de $\mathbb{U}$ (sinon $0 \in K$). On fixe θ tel que $e^{i\theta} \notin K$ et on considère une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{U} \setminus \{e^{i\theta}\}$. L'ensemble des arguments des éléments de $K \cap \mathbb{U}$ est alors une partie de $\mathbb{R}$ connexe et non vide, c'est un intervalle et la longueur de cet intervalle est inférieure ou égale à π car $0 \notin K$.

5) g est à valeurs réelles, $g(a) = g(b)$ et pour tout $x \in]a,b[$, on a $g'(x) = \Re(e^{-i(\alpha+\beta)/2} f'(x)) \geqslant 0$ car $\beta - \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Il en résulte que g est constante sur $[a,b]$. Ainsi il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ et h à valeurs réelles tels que $f = \gamma + ie^{i(\alpha+\beta)/2}h$. De plus $h(a) = h(b)$, donc h' s'annule dans $]a,b[$ et ceci contredit l'hypothèse $0 \notin C$.

Exercice 79.

1) Non, $P = (x^2+x)^2/4$ convient.

2) Pour $n = 1$ c'est l'égalité des accroissements finis. Pour $n = p+1$, en supposant la formule valide au rang p,

$$(\Delta^n f)(x) = (\Delta^p(\Delta f))(x) = (\Delta f)^{(p)}(x+p\theta) = (\Delta f^{(p)})(x+p\theta) = f^{(n)}(x+p\theta+\sigma)$$

avec $\theta, \sigma \in \,]0,1[$. Donc $p\theta+\sigma \in \,]0,n[$ et on peut l'écrire $n\tau$ avec $\tau \in \,]0,1[$.

3) Déjà la propriété est triviale si $P = 0$. Pour $P \neq 0$, on choisit a tel que $\forall\, x \geqslant a$, on a $P(x) > 0$. La fonction $f = \sqrt{P}$ est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$. De plus sa restriction à $[a,+\infty[\cap\mathbb{N}$ est à valeurs entières donc il en est de même de toutes les fonctions $\Delta^n f$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Soit $p = \deg(P)$. Je dis que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la quantité $x^{k-p/2} f^{(k)}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et je le prouve par récurrence sur k :

Pour $k = 0$ cela résulte de la définition de p. Si c'est vrai pour $0, \dots, k-1$ alors

$$P^{(k)} = (f^2)^{(k)} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \binom{k}{i} f^{(i)} f^{(k-i)} = 2ff^{(k)} + \sum_{0<i<k} \binom{k}{i} f^{(i)} f^{(k-i)}.$$

En multipliant par x^{k-p} et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient l'existence d'une limite finie en $+\infty$ pour $(x^{-p/2}f(x)) \times (x^{k-p/2}f^{(k)}(x))$ donc aussi pour $x^{k-p/2}f^{(k)}(x)$ car le cofacteur admet une limite finie non nulle.

Concluons : pour $k > p/2$, $f^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $(\Delta^k f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ suffisament grand ($x \geqslant b$). Il en résulte classiquement que la suite $(f(n))_{n \geqslant b}$ est polynomiale : $f(n) = Q(n)$ pour tout $n \geqslant b$ puis $P(n) = Q^2(n)$ dans les mêmes conditions. Ainsi $P - Q^2$ ayant une infinité de racines est le polynôme nul, soit $P = Q^2$. Enfin Q est à coefficients rationnels car c'est le polynôme de Lagrange associé à f en des points entiers dont les images par f sont entières.