# Pgcd

**Exercice 1.** *$a$ est premier à $b$* $\Rightarrow \operatorname{pgcd}(a,bc)=\operatorname{pgcd}(a,c)$
Soient $a,b,c\in\mathbb{Z}$ tels que $a\wedge b=1$. Montrer que $a\wedge(bc)=a\wedge c$.

**Exercice 2.** $\operatorname{pgcd}(a+b,\operatorname{ppcm}(a,b))$
Soient $a,b$ entiers, $d=a\wedge b$, $m=a\vee b$. Chercher $(a+b)\wedge m$.

**Exercice 3.** $\operatorname{pgcd}((a-b)^3,a^3-b^3)$
Soient $a,b\in\mathbb{Z}$. Chercher $(a-b)^3\wedge(a^3-b^3)$.

**Exercice 4.** $\operatorname{pgcd}(n^3+n,2n+1)$
Soit $n\in\mathbb{N}$. Chercher $(n^3+n)\wedge(2n+1)$.

**Exercice 5.** $\operatorname{pgcd}(15n^2+8n+6,30n^2+21n+13)$
Soit $n\in\mathbb{N}$. Chercher $(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13)$.

**Exercice 6.** *pgcd et ppcm imposés*
Soient $d,m\in\mathbb{N}^*$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur $d$ et $m$ pour qu'il existe $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $a\wedge b=d$ et $a\vee b=m$.
Résoudre ce problème pour $d=50$ et $m=600$.

**Exercice 7.** $\operatorname{ppcm}(x,y)+11\operatorname{pgcd}(x,y)=203$
Trouver les couples d'entiers $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tels que : $x\vee y+11(x\wedge y)=203$.

**Exercice 8.** $x^2+y^2=85113$, $\operatorname{ppcm}(x,y)=1764$
Résoudre : $\begin{cases} x^2+y^2=85113\\ x\vee y=1764.\end{cases}$

**Exercice 9.** $\operatorname{ppcm}(x,y)=210\operatorname{pgcd}(x,y)$, $y-x=\operatorname{pgcd}(x,y)$
Résoudre : $\begin{cases} x\vee y=210(x\wedge y)\\ y-x=x\wedge y.\end{cases}$

**Exercice 10.** $\operatorname{pgcd}(x,y)=x+y-1$
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ : $x\wedge y=x+y-1$.

**Exercice 11.** $\operatorname{ppcm}(x,y)=x+y-1$
Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$ : $x\vee y=x+y-1$.

**Exercice 12.** $\operatorname{pgcd}(x,y)=x-y$, $\operatorname{ppcm}(x,y)=300$
Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ : $\begin{cases} x\wedge y=x-y\\ x\vee y=300.\end{cases}$

**Exercice 13.** $\operatorname{pgcd}(a^n-1,a^m-1)$
Soient $a,m,n\in\mathbb{N}^*$, $a\geqslant 2$, et $d=(a^n-1)\wedge(a^m-1)$.
**1)** Soit $n=qm+r$ la division euclidienne de $n$ par $m$. Démontrer que $a^n\equiv a^r \pmod{a^m-1}$.
**2)** En déduire que $d=(a^r-1)\wedge(a^m-1)$, puis $d=a^{(n\wedge m)}-1$.
**3)** A quelle condition $a^m-1$ divise-t-il $a^n-1$ ?

**Exercice 14.** *pgcd multiple*
Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}^*$ et $b_i=\prod_{j\neq i}a_j$. Montrer que $a_1,\dots,a_n$ sont *deux à deux* premiers entre eux si et seulement si $b_1,\dots,b_n$ sont premiers entre eux *dans leur ensemble.*

## solutions

**Exercice 2.**
$= d$.

**Exercice 3.**
$= |a-b|(a \wedge b)^2$ ou $3|a-b|(a \wedge b)^2$.

**Exercice 4.**
$8(n^3+n) = (2n+1)(4n^2-2n+5)-5 \Rightarrow d = (2n+1) \wedge 5 \Rightarrow d = 5$ si $n \equiv 2 \pmod 5$, $d = 1$ sinon.

**Exercice 5.**
$= 1$.

**Exercice 6.**
$\{a,b\} \in \{\{50,600\},\{150,200\}\}$.

**Exercice 7.**
$\{a,b\} \in \{\{1,192\},\{3,32\},\{7,126\},\{14,63\}\}$.

**Exercice 8.**
$\{x,y\} = \{147,252\}$.

**Exercice 9.**
$x = 14k$, $y = 15k$.

**Exercice 10.**
$x$ impair, $y = 2-x$.

**Exercice 11.**
$x = 1$ ou $y = 1$.

**Exercice 12.**
$(300,150)$, $(150,100)$, $(100,75)$, $(75,60)$, $(60,50)$.

**Exercice 13.**
**1)** $a^m - 1 \mid (a^{qm}-1)a^r = a^n - a^r$.
**2)** $A \wedge (AQ+R) = A \wedge R$. Algorithme d'Euclide sur les exposants de $a$.
**3)** ssi $m \mid n$.