Congruences

Exercice 1. *Sommes de nombres impairs*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

Exercice 2. *Petit théorème de Fermat*
Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que pour $1 \leqslant k < p$, p divise $\binom{p}{k}$.
En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Exercice 3. $(p-1)(p-2)...(p-n)/n!$
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Montrer que $\dfrac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p.

Exercice 4. $n^7 \equiv n \pmod{42}$
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n \pmod{42}$.

Exercice 5. *Puissances de 10 modulo 7*
1) Vérifier que $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
2) Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 \pmod{7}$.

Exercice 6. *Puissances de 7*
Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Exercice 7. $3^x = 2^y + 1$
1) Soient $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 1 \pmod{2^y} \Leftrightarrow 2^{y-2} \mid x$.
2) Trouver tous les couples d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.

Exercice 8. *Suites récurentes linéaires*
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 9. *Suites récurentes linéaires*
Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.

Exercice 10. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$.

Exercice 11. $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{8}$
Montrer que : $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{8}$.

Exercice 12. *Cubes consécutifs*
Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 13. $n^2 + 3n + 5 \pmod{121}$
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3n + 5$ n'est pas divisible par 121.

Exercice 14. $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n-1)$ *est divisible par 6*
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n-1)$ est divisible par 6.

Exercice 15. $2^{32} + 1$ *est divisible par 641*
Montrer sans calculatrice que $2^{32} + 1$ est divisible par 641.

Exercice 16. $3^x.7^y$ *mod 10*
Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y$ se termine par 1 en base 10.

Exercice 17. $a^3 = \dots 123456789$

Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10.

1) Montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

2) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4\times 10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$.

3) En déduire que il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.

Exercice 18. $mn(m^{60} - n^{60})$ *est divisible par* 56786730

Montrer que quelques soient les entiers m et n, le nombre $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Exercice 19. $q \mid 2^p - 1$

Soient p, q premiers impairs tels que $q \mid 2^p - 1$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{2p}$.

Exercice 20. *divisibilité par 7*

Infirmer ou justifier le critère de divisibilité par 7 suivant retrouvé dans un vieux grimoire :

Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.

Exercice 21. *ENS 2016*

Soient p un nombre premier et m, n, x, a, b des entiers. Soient (a_i) et (b_i) les décompositions respectives de m et n en base p.

1) Monter que $(1 + x)^p$ est congru à $1 + x^p$ modulo p.

2) Monter que $\binom{m}{n}$ est congru à $\prod_i \binom{b_i}{a_i}$ modulo p. Indication : considérer le polynôme $(1 + X)^m$.

3) Monter que $\binom{pb}{pa}$ est congru à $\binom{b}{a}$ modulo p^2. Indication : dénombrer…

solutions

Exercice 6.

$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, $7^2 \equiv 1 \pmod 4$, $7^{7^{7^{7^7}}}$ est impair donc $7^{7^{7^{7^{7^7}}}} \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$ et $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$.

Exercice 7.

2) $x = 1, y = 1$ ou $x = 2, y = 3$.

Exercice 9.

$= 2$.

Exercice 13.

$n^2 + 3n + 5 \equiv (n - 59)^2 - 88 \pmod{121}$. Si 121 divise $n^2 + 3n + 5$, alors $11 \mid n - 59 \Rightarrow$ contradiction.

Exercice 16.

$x \equiv y \pmod 4$.

Exercice 17.

2) Récurrence : $a^{4\times 10^{k+1}} - 1 = (a^{4\times 10^k} - 1)(a^{4\times 10^k \times 9} + \ldots + a^{4\times 10^k \times 0})$.

3) $x = 123456789^{800000001/3}$.

Exercice 18.

$56786730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 61$. Pour tous ces facteurs premiers, on a $\varphi(p) \mid 60$.

Exercice 19.

L'ordre de $\dot{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise p donc est égal à p et cet ordre divise $\varphi(q) = q - 1$.

Exercice 21.

1) Formule du binôme, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ montre que $\binom{p}{k}$ est divisible par p lorsque k est premier à p.

2) On écrit $n = pn' + a_0$ et $m = pm' + b_0$. Avec la question précédente, en remplaçant l'entier x par une indéterminée X ce qui ne change pas le raisonnement, $(1+X)^m$ est congru à $(1+X^p)^{m'}(1+X)^{b_0}$ modulo p et en particulier le coefficient de degré $pn' + a_0$ est congru à $\binom{m'}{n'}\binom{b_0}{a_0}$. On termine par récurrence.

3) On considère b ensembles $E_1, \ldots, E_b$ finis de même cardinal p deux à deux disjoints et on compte le nombre de manières de choisir pa éléments dans $E = E_1 \cup \ldots \cup E_b$ sachant qu'on en prend n_1 dans E_1,…,n_b dans E_b avec $n_1 + \ldots + n_b = pa$. C'est $\binom{p}{n_1}\ldots\binom{p}{n_b}$ donc un multiple de p^2 s'il y a au moins deux entiers n_i tels que $n_i \neq 0$ et $n_i \neq p$. Reste les cas où chaque n_i vaut 0 ou p (il ne peut y avoir un récalcitrant unique puisque $n_1 + \ldots + n_b$ est un multiple de p). Dans un tel cas, le produit $\binom{p}{n_1}\ldots\binom{p}{n_b}$ est égal à 1 et le nombre de tels cas est $\binom{b}{a}$ (choisir quels n_i valent p).