

Relation de Bézout

Exercice 1. *Équations à coefficients entiers*

Soient a, b, c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax + by = c$, dont on recherche les solutions dans \mathbb{Z}^2 .

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
- 2) Soit (x_0, y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0 + by_0 = d$. Déterminer toutes les solutions de $ax + by = c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0 .
- 3) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 : $2520x - 3960y = 6480$.

Exercice 2. *Équations à coefficients entiers*

Résoudre dans \mathbb{Z} :

- 1) $95x + 71y = 46$.
- 2) $20x - 53y = 3$.
- 3) $12x + 15y + 20z = 7$.

Exercice 3. *Congruences simultanées*

- 1) Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ avec $b \wedge b' = 1$. Montrer que le système : $\begin{cases} x \equiv a \pmod{b} \\ x \equiv a' \pmod{b'} \end{cases}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb' .
- 2) Généraliser.

Exercice 4. *Congruences simultanées*

Résoudre :

- 1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99} \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{5} \end{cases}$

Exercice 5. *Congruences simultanées*

Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces.

Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.

Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 6. *Décomposition à coefficients positifs*

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que : $\forall x \geq ab, \exists u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = x$.

solutions

Exercice 1.

3) $x = 1 + 11k, y = -1 + 7k.$

Exercice 2.

1) $x = 67 - 71k, y = -89 + 95k.$

2) $x = 24 + 53k, y = 9 + 20k.$

3) $x = -49 + 20k - 5m, y = 49 - 20k + 4m, z = -7 + 3k.$

Exercice 4.

1) $x \equiv 7422 \pmod{13860}.$

2) $x \equiv 7 \pmod{60}.$

Exercice 5.

785.