Propriétés de $\mathbb{Q}$

Exercice 1. *Parties fractionnaires*
Soit $x = p/q \in \mathbb{Q}^*$ avec p, q entiers, $q \geqslant 1$, $p \wedge q = 1$. Calculer $\sum_{k=0}^{q-1}\{kx\}$.

Exercice 2. *Dénominateurs dans un sous-anneau*
Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. On écrit les éléments de A sous forme irréductible ; soit P l'ensemble des dénominateurs. Montrer que $A = \{\frac{m}{p}$ tq $m \in \mathbb{Z}$, $p \in P\}$.

Exercice 3. *Les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ sont principaux*
Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal (si I est un idéal de A, considérer $I \cap \mathbb{Z}$).

Exercice 4. *Décomposition en inverses*
Soit $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. On définit une suite (x_n) de rationnels par récurrence :

- $x_0 = x$,
- Si x_n existe et est non nul, soit $k_n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $1/k_n \leqslant x_n$.
  On pose $x_{n+1} = x_n - 1/k_n$,
- Si $x_n = 0$, on s'arrête. Dans ce cas, $x = 1/k_0 + 1/k_1 + \ldots + 1/k_{n-1}$.

1) Montrer que la suite est toujours finie.
2) Montrer que si k_{i+1} existe, alors $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3) Réciproquement, soit une décomposition : $x = 1/n_0 + \ldots + 1/n_p$ avec $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Montrer que pour tout i, on a $n_i = k_i$.

Exercice 5. *Combinaison de fractions*
Soient $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux rationnels avec $a, c \in \mathbb{Z}$, et $b, d \in \mathbb{N}^*$.
1) Prouver que tout rationnel s'écrit : $x = \frac{ma+nc}{mb+nd}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $mb + nd \neq 0$.
2) Étudier l'unicité d'une telle écriture.
3) Montrer que $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ est compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ si et seulement si m et n ont même signe.

Exercice 6. *Équations algébriques*
Déterminer $x \in \mathbb{Q}$ sachant que :
1) $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. **2)** $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$. **3)** $2x^3 - x - 4 = 0$.

Exercice 7. $x^y = y^x$
On cherche les couples $(x, y) \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$ ($x^y, y^x \in \mathbb{R}$).
On pose $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$ (formes irréductibles), $d = pq' \wedge p'q$, $pq' = ad$ et $p'q = bd$.
1) Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ et $q' = n^b$.
2) En déduire : $b - a = m^{b-a} - n^{b-a}$.
3) Montrer que $b - a \leqslant 1$ et conclure.

solutions

Exercice 1.
$= \frac{1}{2}(q-1)$.

Exercice 2.
Si $p \in P$: $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{p} \in A$ avec $n \wedge p = 1$.
Alors pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{nx+py}{p} \in A$, donc $\frac{1}{p}\mathbb{Z} \subset A$.

Exercice 4.
1) Si $x_n = \frac{p}{q} \neq 0$: $\frac{1}{k_n} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{1}{k_n - 1}$, $\Rightarrow x_{n+1} = \frac{k_n p - q}{k_n q}$ et $0 \leqslant k_n p - q < p$. Donc la suite des numérateurs est strictement décroissante.
2) Car $x_{n+1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n - 1} - \frac{1}{k_n}$.
3) $n_p > n_{p-1}(n_{p-1} - 1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-1}} + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_{p-1} - 1}$.
$n_{p-1} - 1 \geqslant n_{p-2}(n_{p-2} - 1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-2}} + \frac{1}{n_{p-1} - 1} \leqslant \frac{1}{n_{p-2} - 1}$, etc.
Finalement, $x < \frac{1}{n_0 - 1} \Rightarrow n_0 = k_0$.
(cf. INA opt. 1977)

Exercice 5.
1) Pour $x = \frac{p}{q}$, on peut prendre : $m = qc - pd$, $n = pb - qa$.
2) (m, n) est unique à un facteur près.
3) $\frac{ma+nc}{mb+nd} - \frac{a}{b} = \frac{n(bc-ad)}{b(mb+nd)}$, et $\frac{c}{d} - \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m(bc-ad)}{d(mb+nd)}$.

Exercice 6.
1) $x = -\frac{1}{2}$.
2) $x = \frac{2}{3}$.
3) pas de solution.

Exercice 7.
1) $x^y = y^x \Leftrightarrow \frac{p^{p'q}}{q^{p'q}} = \frac{p'^{pq'}}{q'^{pq'}}$ (formes irréductibles) $\Rightarrow p^{p'q} = p'^{pq'}$ et $q^{p'q} = q'^{pq'} \Rightarrow p^b = p'^a$ et $q^b = q'^a$.
Comme $a \wedge b = 1$, on décompose p, p', q, q' en facteurs premiers, d'où le résultat.
2) $(pq' = m^a n^b,\ p'q = m^b n^a,\ m \wedge n = 1,\ a < b) \Rightarrow (d = m^a n^a,\ a = n^{b-a}$ et $b = m^{b-a})$.
3) $m \geqslant n+1$ donc si $b - a \geqslant 2$, on a : $m^{b-a} - n^{b-a} = (m-n)(m^{b-a-1} + \ldots + n^{b-a-1}) > b - a$.
Donc $b - a = 1 = m - n$, $a = n$, $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ et $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.
Ces valeurs conviennent.