

Congruences

Exercice 1. *Sommes de nombres impairs*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

Exercice 2. *Petit théorème de Fermat*

Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que pour $1 \leq k < p$, p divise $\binom{p}{k}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Exercice 3. $(p-1)(p-2)\dots(p-n)/n!$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Montrer que $\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p .

Exercice 4. $n^7 \equiv n \pmod{42}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n \pmod{42}$.

Exercice 5. *Puissances de 10 modulo 7*

1) Vérifier que $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

2) Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 \pmod{7}$.

Exercice 6. *Puissances de 7*

Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^7}}}$?

Exercice 7. $3^x = 2^y + 1$

1) Soient $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 1 \pmod{2^y} \Leftrightarrow 2^{y-2} \mid x$.

2) Trouver tous les couples d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.

Exercice 8. *Suites récurrentes linéaires*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 9. *Suites récurrentes linéaires*

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.

Exercice 10. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$.

Exercice 11. $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{8}$

Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{8}$.

Exercice 12. *Cubes consécutifs*

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 13. $n^2 + 3n + 5 \pmod{121}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 3n + 5$ n'est pas divisible par 121.

Exercice 14. $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 15. $2^{32} + 1$ est divisible par 641

Montrer sans calculatrice que $2^{32} + 1$ est divisible par 641.

Exercice 16. $3^x \cdot 7^y \pmod{10}$

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y$ se termine par 1 en base 10.

Exercice 17. $a^3 = \dots 123456789$

Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10.

1) Montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

2) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4 \times 10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$.

3) En déduire que il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.

Exercice 18. $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730

Montrer que quelques soient les entiers m et n , le nombre $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Exercice 19. $q \mid 2^p - 1$

Soient p, q premiers impairs tels que $q \mid 2^p - 1$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{2p}$.

Exercice 20. divisibilité par 7

Infirmier ou justifier le critère de divisibilité par 7 suivant retrouvé dans un vieux grimoire :

Sèpare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zèro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.

solutions

Exercice 6.

$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, $7^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $7^{7^{7^7}}$ est impair donc $7^{7^{7^7}} \equiv 7 \equiv 3 \pmod{4}$ et $7^{7^{7^7}} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$.

Exercice 7.

2) $x = 1, y = 1$ ou $x = 2, y = 3$.

Exercice 9.

= 2.

Exercice 13.

$n^2 + 3n + 5 \equiv (n - 59)^2 - 88 \pmod{121}$. Si 121 divise $n^2 + 3n + 5$, alors $11 \mid n - 59 \Rightarrow$ contradiction.

Exercice 16.

$x \equiv y \pmod{4}$.

Exercice 17.

2) Récurrence : $a^{4 \times 10^{k+1}} - 1 = (a^{4 \times 10^k} - 1)(a^{4 \times 10^k \times 9} + \dots + a^{4 \times 10^k \times 0})$.

3) $x = 123456789^{800000001/3}$.

Exercice 18.

$56786730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 61$. Pour tous ces facteurs premiers, on a $\varphi(p) \mid 60$.

Exercice 19.

L'ordre de $\dot{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise p donc est égal à p et cet ordre divise $\varphi(q) = q - 1$.