Matrices

Calculs

Exercice 1. *Équation $AX = B$*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que l'équation en X : $AX = B$, $X, B \in \mathcal{M}_{3,n}(\mathbb{K})$, a des solutions si et seulement si les colonnes de B sont des progressions arithmétiques (traiter d'abord le cas $n = 1$).

2) Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Équation $XA = B$*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice X telle que $XA = B$?

Exercice 3. *Équation $aX + (trX)A = B$*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\alpha X + (\operatorname{tr} X)A = B$.

Exercice 4. *Calcul de A^n par la formule du binôme*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5. *Calcul de A^n par polynôme annulateur*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(6) = 6^n$, $P(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^n$, et $P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n$. Montrer que $A^n = P_n(A)$.

3) Même question pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. *Calcul de A^k*

Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$. **2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3)** $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. *Inversion de matrices*

Inverser les matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

5) $\begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\lambda_1} & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1 + \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Exercice 8. *Effet des arrondis*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et B^{-1}.

Similitude

Exercice 9. *Changement de base*

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, (I, J, K, L) et (i, j, k) est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (I, J, 4I+J-3L, -7I+K+5L)$ et $\mathcal{B}' = (4i+2j+k, 5i+j-k, k)$.

Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Exercice 10. *Matrices semblables*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ alors A et B sont semblables.

On cherchera P inversible telle que $PB = AP$.

Exercice 11. *Matrices semblables*

Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 12. *Matrices non semblables*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 13. *Matrices non semblables*

Soient $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A-I)^2$ et $(B-I)^2$).

Exercice 14. *Matrices semblables ?*

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 15. *Matrices semblables ?*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une autre base. Donner la matrice de passage.

Exercice 16. *Matrices triangulaires nilpotentes*

1) Soit A une matrice triangulaire à diagonale nulle. Montrer que A est nilpotente.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice n et φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé. On note $E_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$, et e_i un vecteur quelconque choisi dans $E_i \setminus E_{i-1}$ ($e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$).

a) Justifier l'existence de e_i.

b) Montrer que la famille (e_i) est une base de $\mathbb{K}^n$.

c) En déduire que A est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Parties remarquables

Exercice 17. *Matrices en damier*

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est *en damier* si $a_{ij} = 0$ pour $j-i$ impair. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ en damier. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 18. *Matrices stochastiques*
Soit $\mathcal{D} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\forall\, i,j,\ a_{ij} \geqslant 0$ et $\forall\, i,\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1\}$.
1) Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par multiplication.
2) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 19. *Matrices centrosymétriques*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB. Montrer que si A est centro-symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi centro-symétrique.

Exercice 20. *Algèbre de matrices*
On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A} = \{aU + bI$ tq $a, b \in \mathbb{R}\}$ pour $n \geqslant 2$.
1) Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.
3) Montrer que si $b(b + na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4) Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I$.

Exercice 21. *Centre de $GL_n(\mathbb{K})$*
On suppose $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et on note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1) Montrer que $F_{ij} = I + E_{ij}$ est inversible.
2) En déduire que $\operatorname{vect}(GL_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3) Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 22. *Centre de $GL_n(\mathbb{K})$*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 23. *Centre des matrices triangulaires unipotentes*
On note $\mathcal{G} = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{ii} = 1\}$.
1) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
2) En utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le centre de $\mathcal{G}$ et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{K}, +)$.

Exercice 24. *Commutant d'une matrice diagonale*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AM = MA\}$ (*commutant de* A).
1) Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.
a) Chercher $\mathcal{C}_A$.
b) On suppose $\operatorname{card}(\mathbb{K}) \geqslant n$. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \quad M & \longmapsto \quad MA - AM. \end{cases}$ Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Exercice 25. *Matrices de trace nulle*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non scalaire telle que $\operatorname{tr} M = 0$.
1) Montrer qu'il existe une matrice colonne X_1 telle que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.
2) En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\operatorname{tr} M_1 = 0$.
3) Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
4) En utilisant l'exercice **24**, montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Exercice 26. *Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible*
Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.
1) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M$ tq $\operatorname{tr}(AM) = 0\}$.
2) En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 27. *Matrices magiques*

Une matrice carrée M est dite *magique* si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ magiques}\}$.

1) Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $s : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).

2) Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.

3) Montrer que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, $\mathcal{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.

4) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.
Soit $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathcal{K} = \{(x, \dots, x) \in \mathbb{K}^n\}$.

a) Montrer que : $M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par φ_M.

b) En déduire $\dim(\mathcal{M})$.

Exercice 28. *Quaternions*

Montrer que $\mathcal{C} = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Montrer que $\mathcal{H} = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\right\}$ est un anneau non commutatif où tout élément non nul est inversible.

Exercice 29. *Groupes de matrices*

Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour la multiplication, $\mathcal{G}$ soit un groupe. On note J l'élément neutre et pour $M \in \mathcal{G}$, φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

1) Montrer que φ_J est une projection.

2) Montrer que : $\forall\, M \in \mathcal{G}$, $\varphi_{M|\,\mathrm{Ker}\,\varphi_J} = 0$ et $\varphi_{M|\,\mathrm{Im}\,\varphi_J}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,\varphi_J$.

3) On note $k = \mathrm{rg}(J)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_k(\mathbb{K})$.

Exercice 30. *Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Une partie $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée *idéal à droite de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si c'est un sous-groupe additif vérifiant :

$$\forall\, A \in \mathcal{I},\ \forall\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB \in \mathcal{I}.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{H}_A$ le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A, et $\mathcal{I}_A$ l'idéal à droite engendré par A : $\mathcal{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$.

1) Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $M \in \mathcal{I}_A \Leftrightarrow \mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}_A$.

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C$. Simplifier alors $\mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B$.

3) Soit $\mathcal{I}$ un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{I}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$.

4) Que peut-on dire des idéaux *à gauche* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 31. *Matrices antisymétriques*

Soit $E = \{\text{matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisymétriques}\}$ et $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & {}^tAM + MA \end{cases}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que f est un endomorphisme.

2) Quelle est la trace de f ?

Exercice 32. *Matrice compagne*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(A)$ son commutant.

Montrer que pour $M, N \in \mathcal{C}(A)$ on a : $M = N \Leftrightarrow M$ et N ont la même dernière colonne. En déduire que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}_{n-1}[A]$.

Opérations

Exercice 33. *Homographies*

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note $f_M : \begin{cases} \mathbb{R}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{\infty\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d}. \end{cases}$

Montrer que $M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes de $GL_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$. Quel est son noyau ?

Exercice 34. *Opérations par blocs*

1) Soient $A_1 \in \mathcal{M}_{n,p_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n,p_2}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{p_1,q}(\mathbb{K})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{p_2,q}(\mathbb{K})$.
On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p_1+p_2}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2,q}(\mathbb{K})$.
Montrer que $AB = A_1B_1 + A_2B_2$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A, B, 0, C$ sont des matrices de tailles $p\times p$, $p\times q$, $q\times p$, $q\times q$ (matrice triangulaire par blocs). Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont. Le cas échéant, donner M^{-1} sous la même forme.

3) En déduire une démonstration de la propriété : *L'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire.*

Exercice 35. *Décomposition d'une matrice en matrices inversibles*

Soit $\mathbb{K}$ ayant au moins trois éléments et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = U + V$. Donner un contre-exemple si $\mathrm{card}(\mathbb{K}) = 2$.

Exercice 36. *Mines 2014*

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices inversibles ?

Exercice 37. *Conjugaison*

1) Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi_P : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{cases}$ est un isomorphisme d'algèbre.

2) Soit $\varphi : A = (a_{ij}) \mapsto A' = (a_{n+1-i,n+1-j})$.

a) Montrer que φ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = \varphi_P$.

Exercice 38. *Valeurs propres de AB et BA*

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$ (I_n, I_p = matrices unité d'ordres n et p).

1) Montrer que si C est inversible, alors D l'est aussi (résoudre $DX = 0$).

2) Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.

3) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.

Exercice 39. *M antisymétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1) Montrer que $I + M$ est inversible (si $MX = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).

2) Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 40. *Équation $X^2 + X = A$*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: $X^2 + X = A$.

Soit X une solution et φ_A, φ_X les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ de matrices A et X dans la base canonique.

1) Montrer que X ou $X + I$ n'est pas inversible.

2) Si X n'est pas inversible, montrer que X est proportionnelle à A (on montrera que $\mathrm{Ker}\,\varphi_X = \mathrm{Ker}\,\varphi_A$ et $\mathrm{Im}\,\varphi_X = \mathrm{Im}\,\varphi_A$).

3) Résoudre l'équation.

Exercice 41. *Forme bilinéaire trace*

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle. Montrer que l'application $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \operatorname{tr}(AX) \end{cases}$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

2) Réciproquement : Soit $\varphi : \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire quelconque. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = f_A$ (on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$).

3) Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant : $\forall\, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(XY) = \varphi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

Exercice 42. *Matrice vérifiant $A^k = I$*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^k = I$ avec $k \neq 0$ et $k \neq \operatorname{car}(\mathbb{K})$. On pose $B = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$. Soient u, v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ matrices A et B dans la base canonique.

1) Montrer : $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) = \operatorname{Im} v$, $\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}) = \operatorname{Ker} v$, $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v = \mathbb{K}^n$.

2) En déduire : $\operatorname{tr} B = k \operatorname{rg} B$.

Exercice 43. *Suite récurrente linéaire matricielle*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Exprimer en fonction de k le terme général de la suite (M_k) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : M_0 est donnée, $M_{k+1} = AM_k + B$.

Exercice 44. *A, A^2, A^3 données $\Rightarrow A^p$*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = \lambda U + \mu V$, $A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V$, $A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V$.

1) Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ (chercher une relation linéaire entre A, A^2, A^3).

2) On suppose ici $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Soit X un vecteur propre de A. Montrer que X est vecteur propre de U et de V avec les valeurs propres $0, 0$ ou $1, 0$, ou $0, 1$.

Exercice 45. *$A > 0, X > 0$ et $A^k X = X$*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si tous ses coefficients sont strictement positifs.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^k X = X$.
Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif tel que $MY = Y$.

Exercice 46. *Conservation de l'inverse sur un sous-corps*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Comparer les énoncés : $(1) \Leftrightarrow M$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $(2) \Leftrightarrow M$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Divers

Exercice 47. *Coefficients du binôme*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$ telle que $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. En déduire la matrice A^{-1}.

Exercice 48. *Coefficients du binôme*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{n-j} \binom{n-j}{i-1}$.

1) Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2) En déduire A^3.

Exercice 49. *Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$*

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le pgcd de $x_1, \ldots, x_n$. Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (par récurrence sur n).

3) Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. CNS pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = Y$?

Exercice 50. *Rayon spectral d'une matrice à coefficients positifs*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall\, i, j,\ a_{ij} > 0$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre :

$$(X \geqslant Y) \Leftrightarrow (\forall\, i,\ x_i \geqslant y_i),$$

et on pose pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geqslant 0$, $X \neq 0$:

$$\begin{aligned} R(X) &= \sup\{r \geqslant 0 \text{ tq } AX \geqslant rX\}, \\ R &= \sup\{R(X) \text{ tq } X \geqslant 0, X \neq 0\}. \end{aligned}$$

1) Montrer que R est fini et qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $R(X_0) = R$.
2) Montrer que toutes les coordonnées de X_0 sont strictement positives.
3) On pose $AX_0 = RX_0 + Y$. Montrer que $Y = 0$.
4) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant R$, et $(|\lambda| = R) \Leftrightarrow (\lambda = R)$.

Exercice 51. *ENS MP 2002*

Que dire des morphismes de groupe $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 52. *Tas de cailloux, Centrale 2014*

On s'intéresse aux matrices A de coefficients a_{ij} entiers, de diagonale nulle et dont les termes non diagonaux valent ± 1.
1) Calculer $\det(A)$ dans le cas où tous les termes diagonaux valent 1 et en déduire que dans le cas général A est inversible si n est pair (on pourra raisonner modulo 2).
2) Que dire du rang de A si n est impair ?
3) Soit un tas de n cailloux tel que si l'on en retire un, on puisse toujours faire deux tas de même masse avec les $n - 1$ cailloux restants. Montrer que n est impair.
4) Montrer que pour n impair, il existe un nombre fini de masses à une constante multiplicative près permettant de réaliser la condition précédente.
5) On impose à présent que pour $n = 2k + 1$, quelque soit le caillou que l'on retire, il est possible de former deux tas de k cailloux de même masse. Montrer que tous les cailloux ont même masse.

Exercice 53. *Matrice tridiagonale, ENS ULC 2015*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, si les coefficients de Av sont tous positifs alors les coefficients de v sont tous positifs.
2) Montrer que A est inversible et que son inverse est à coefficients positifs.

solutions

Exercice 1.

2) $X = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

$X = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

$(\alpha + \operatorname{tr} A)\operatorname{tr} X = \operatorname{tr} B$.

Si $\alpha(\alpha + \operatorname{tr} A) \neq 0$, il y a une solution unique : $X = \dfrac{1}{\alpha}\left(B - \dfrac{\operatorname{tr} B}{\alpha + \operatorname{tr} A}A\right)$.

Si $\alpha = 0$, il y a des solutions ssi A et B sont proportionnelles.

Si $\alpha + \operatorname{tr} A = 0$, il y a des solutions ssi $\operatorname{tr} B = 0$: $X = \dfrac{1}{\alpha}B + \lambda A$.

Exercice 4.

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}n(n+1) & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

1) $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$ avec $na = (2n-1)^k + (n-1)(-1)^k$ et $nb = (2n-1)^k - (-1)^k$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k & \frac{1}{3}(4k^3+6k^2+2k) \\ 0 & 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right]^k = (x^2+y^2+z^2)^{k-1}A$.

Exercice 7.

1) $\dfrac{A + (2-n)I}{n-1}$.

2) $\dfrac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & & (-b) \\ & \ddots & \\ (-b) & & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & \pm 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\dfrac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} (0) & & 1/a_n \\ & \iddots & \\ 1/a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.

6) $\operatorname{diag}(\lambda_i) - \dfrac{1}{1+\lambda_1+\ldots+\lambda_n}(\lambda_i\lambda_j)$.

Exercice 8.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{100}{63}\begin{pmatrix} 35 & -175 & 161 \\ -175 & 911 & -850 \\ 161 & -850 & 800 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 0 & 4a & 12a+4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix} \text{ est inversible pour } a \neq 0.$$

Exercice 11.

$$N = P^{-1}AP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

$B - I$ est inversible.

Exercice 14.

$$\text{oui, } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

On doit avoir $(M-I)^3 = 0$, ce qui impose $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En prenant $Z \in \mathbb{R}^3$ tel que $(M-I)^2 Z \neq 0$, par exemple $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $Y = (M-I)Z$, $X = (M-I)Y$ et $P = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$ on obtient une solution.

Exercice 18.

2) Si $A, B \in \mathcal{D}$ et $AB = I$, alors pour $i \neq j$: $\forall\, k$, $a_{ik}b_{kj} = 0$.
Soit $a_{i1} \neq 0$: alors $b_{1j} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $a_{i1} = b_{1i} = 1$.
Donc chaque colonne de A contient $n-1$ fois 0 et une fois 1. A étant inversible, c'est une matrice de permutation.

Exercice 20.

2) $M^{-1} = \dfrac{-a}{b(na+b)}U + \dfrac{1}{b}I$.

4) $M^n = \dfrac{(na+b)^n - b^n}{n}U + b^n I$. Si n est pair, $M^n = I \Leftrightarrow M = I$ ou $M = \pm(I - \frac{2}{n}U)$. Si n est impair, $M^n = I \Leftrightarrow M = I$.

Exercice 23.

2) Pour $i < j$, on doit avoir $M(I + E_{ij}) = (I + E_{ij})M$ donc $a_{ki} = 0$ si $k \neq i$ et $a_{jk} = 0$ si $k \neq j$. On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 26.

2) Si A est diagonale : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $a_{k\ell} \neq 0$: $M = I - \dfrac{\operatorname{tr} A}{a_{k\ell}} E_{\ell k}$.

Exercice 29.

1) $J^2 = J$.

2) $JM = MJ$.

Exercice 31.

2) La base canonique de E est $(F_{ij} = E_{ij} - E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Si $M \in E$, la coordonnée de M suivant F_{ij} est le coefficient d'indices i, j de M. En particulier, en notant $A = (a_{ij})$, la coordonnée de $f(F_{ij})$ suivant F_{ij} est $a_{ii} + a_{jj}$, donc :

$$\operatorname{tr} f = \sum_{i,j} (a_{ii} + a_{jj}) = (n-1) \operatorname{tr} A.$$

Exercice 34.

2) $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 36.

Oui : $I_n + E_{ij}$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 38.

2) $D^{-1} = BC^{-1}A + I_p$.

Exercice 40.

3) $X \in \{-A, \frac{1}{2}A, A - I, -\frac{1}{2}A - I\}$ si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, $X \in \{-A, A - I\}$ si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) = 2$.

Exercice 42.

2) $u_{|\operatorname{Im} v} = \operatorname{id} \Rightarrow \operatorname{tr}(u_{|\operatorname{Im} v}) = \operatorname{rg} v \Rightarrow \operatorname{tr}(v_{|\operatorname{Im} v}) = k \operatorname{rg} v$.

Exercice 43.

$M_k = A^k M_0 + S_k B$ avec $S_k = I + A + \ldots + A^{k-1} = (I - A^k)(I - A)^{-1}$ si $I - A$ est inversible.

Exercice 44.

1) $A^3 - (\lambda + \mu)A^2 + \lambda\mu A = 0$.

2) $U = \dfrac{\mu A - A^2}{\lambda(\mu - \lambda)}$, $V = \dfrac{\lambda A - A^2}{\mu(\lambda - \mu)}$ et la valeur propre est 0, λ ou μ.

Exercice 48.

1) $\varphi(P) = (-X - 1)^{n-1} P\left(-\dfrac{1}{X + 1}\right)$.

2) I.

Exercice 50.

1) Compacité.

2) Si $x_1 = 0$, on pose $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$R(Y) \geqslant \min\Big(a_{11} + \dfrac{a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n}{\alpha}, \dfrac{\alpha a_{21}}{x_2} + R(X_0), \ldots, \dfrac{\alpha a_{n1}}{x_n} + R(X_0)\Big) > R(X_0)$ pour $\alpha > 0$ assez petit.

3) Si $y_1 > 0$, on pose $X = X_0 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: $AX - RX = Y + \alpha \begin{pmatrix} a_{11} - R \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, donc pour $\alpha > 0$ assez petit, $R(X) > R$.

4) Inégalité triangulaire.

Exercice 51.

Soit φ un tel morphisme. Alors pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $\dot{0} = p\varphi(M) = \varphi(M^p)$, donc φ s'annule sur toute matrice qui est une puissance p-ème. Notons $P(i,j,\alpha)$ la matrice de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, qui est aussi la matrice de l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$. Toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ peut être transformée, à l'aide de ces seules opérations élémentaires, en une matrice $M' = \operatorname{diag}(1,\dots,1,\det(M))$ par une adaptation de l'algorithme de Gauss. Comme $P(i,j,\alpha) = P(i,j,\alpha/p)^p$ et $\det(M) = \pm(|\det(M)|^{1/p})^p$, on obtient : $\varphi(M) = \dot{0}$ si $\det(M) > 0$ et $\varphi(M) = \varphi(\operatorname{diag}(1,\dots,1,-1)) = x$ si $\det(M) < 0$. Réciproquement, la fonction φ ainsi définie est effectivement un morphisme de groupe si et seulement si $2x = \dot{0}$, soit $x = \dot{0}$ pour p impair, et $x \in \{\dot{0}, \dot{q}\}$ pour $p = 2q$.

Exercice 52.

1) Si $A = \begin{bmatrix} 0 & (1) \\ (1) & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{rg}(A + I_n) = 1$ donc -1 est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$ et la dernière valeur propre vaut $n-1$ puisque $\operatorname{tr}(A) = 0$. Ainsi $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Dans le cas général, A est congrue modulo 2 à la matrice précédente donc les déterminants le sont aussi. En particulier, si n est impair, $\det(A)$ est impair donc non nul.

2) La sous-matrice obtenue en retirant la dernière ligne et la dernière colonne est inversible donc $\operatorname{rg}(A) \geqslant n-1$.

3) Soit $M = (m_i)$ la matrice colonne constituée des masses des cailloux (supposées strictement positives). Retirer le caillou i et diviser les $n-1$ restants en deux tas de même masse revient à trouver une matrice ligne L_i dont le i-ème coefficient est nul et les autres valent ± 1, telle que $L_i M = 0$. Si A est la matrice constitué des lignes $L_1, \dots, L_n$ alors $AM = 0$ avec $M \neq 0$ donc A est non inversible et n est impair.

4) Il y a un nombre fini de matrices A possibles et pour chacune, la colonne M doit être dans le noyau de A qui est de dimension 1 puisque $\operatorname{rg}(A) \geqslant n-1$.

5) Si A est la matrice associée aux retraits, $A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et $AM = 0$. Ces deux vecteurs sont proportionnels vu $\operatorname{rg}(A)$.

Exercice 53.

1) Soit p le plus petit indice tel que $v_p = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v_i$. Si $p = 1$ on obtient $2v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_1$ et donc $v_1 \geqslant 0$. De même si $p = n$. On suppose que $2 \leqslant p \leqslant n-1$. On a alors $2v_p \geqslant v_{p-1} + v_{p+1} \geqslant 2v_p$ avec égalité si et seulement si $v_{p-1} = v_{p+1} = v_p$, ce qui est impossible d'après la définition de p. Donc $v_p > 0$.

2) Soit v tel que $Av = 0$. D'après la question précédente on sait que, pour tout i, $v_i \geqslant 0$. Soit p le plus petit indice tel que $v_p = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v_i$. Si $p = 1$ alors $0 = 2v_1 - v_2 \geqslant v_1$ et donc $v_1 = 0$ puis $v = 0$. De même si $p = n$. On suppose que $2 \leqslant p \leqslant n-1$. On a alors $2v_p = v_{p-1} + v_{p+1}$, ce qui entraîne $v_{p-1} = v_p$ et contredit la définition de p. On en déduit que $v = 0$ et donc que A est inversible. Soit v_i la i-ème colonne de A^{-1}. Tous les coefficients de Av_i sont positifs, donc les coefficients de v_i sont tous positifs.