

## Suites récurrentes linéaires

### Exercice 1. Ensi Chimie P' 93

- 1) Résoudre  $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$ ,  $u_0 = a$ ,  $u_1 = b$ .
- 2) Si  $a = 0$ , trouver  $\lim u_n$ .
- 3) Résoudre :  $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$ .

### Exercice 2. Équations de récurrence linéaire

- 1) Résoudre :  $u_{n+2} - u_n = n - 1$ ,  $u_0 = u_1 = 0$ .
- 2) Résoudre :  $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$ .

### Exercice 3. Système récurrent

On donne  $u_0, v_0$ . Résoudre le système : 
$$\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$$

### Exercice 4. Caractérisation des suites polynomiales

Soit  $(u_n)$  une suite de réels. On définit les suites dérivées de  $(u_n)$  :

$$(u'_n) = (u_{n+1} - u_n), \quad (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n), \quad \dots, \quad (u_n^{(k+1)}) = (u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}).$$

- 1) Exprimer  $u_n^{(k)}$  en fonction de  $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est polynomiale si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(u_n^{(k)}) = (0)$ .

### Exercice 5. Nombre de nombres ne comportant pas 13

Soit  $T_n$  le nombre d'entiers naturels de  $n$  chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

- 1) Montrer que  $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$ .
- 2) Calculer  $T_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 6. $(\sqrt{3} + 1)^{2n+1} - (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$

On note  $x_n = (\sqrt{3} + 1)^{2n+1}$ ,  $y_n = (\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$ , et  $z_n = \lfloor x_n \rfloor$ .

- 1) Montrer que  $z_n = x_n - y_n$ .
- 2) En déduire que  $2^{n+1}$  divise  $z_n$ .

## solutions

### Exercice 1.

1)  $u_n = \frac{1}{3}((a + 2b) + 2(a - b)(-\frac{1}{2})^n)$ .

3)  $v_n = \lambda\mu^{(-\frac{1}{2})^n}$ .

### Exercice 2.

1)  $u_n = \frac{1}{4}n^2 - n + \frac{3}{8}(1 - (-1)^n)$ .

2)  $u_n = \frac{1}{3}(n - 1) + aj^n + bj^{2n}$ .

### Exercice 3.

$$2u_n = u_0 + v_0 + (-\frac{1}{5})^n(u_0 - v_0), \quad 2v_n = u_0 + v_0 - (-\frac{1}{5})^n(u_0 - v_0).$$

### Exercice 4.

1)  $u_n^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} u_{n+p}$ .

### Exercice 5.

2)  $6T_n = (3 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n + (3 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n$ .