Opérations

Exercice 1. $x + y - xy$

1) Sur $E = [0,1]$, on définit l'opération : $x * y = x + y - xy$. Vérifier que $*$ est interne, et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables, éléments réguliers).

2) Mêmes questions avec $E =]-\infty, 1[$.

Exercice 2. *$x \mapsto axa$ surjective*

Soit $*$ une opération associative sur E, et $a \in E$ telle que l'application : $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a * x * a \end{cases}$ soit surjective. Montrer qu'il existe un élément neutre, et que a est symétrisable.

Exercice 3. *Opération induite sur les parties*

Soit $*$ une opération sur E. Pour $A, B \subset E$, on pose $A * B = \{a * b \text{ tq } a \in A, b \in B\}$.

1) Étudier les propriétés de $*$ sur $\mathcal{P}(E)$ en fonction de celles de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).

2) Est-ce que $*$ est distributive par rapport à $\cup$?

Exercice 4. *Loi sur $\mathbb{Z}^2$*

On définit l'opération dans $\mathbb{Z}^2$: $(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$.

1) Étudier les propriétés de cette opération.

2) Pour $z \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}(z) = az + b$. Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \\ (a,b) & \longmapsto & f_{a,b} \end{cases}$ est un morphisme pour $*$ et $\circ$.

3) Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 5. *Composition de relations*

Soit E un ensemble, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des relations binaires sur E. Pour $R, S \in \mathcal{F}$, on définit la relation $R * S$ par : $x\,(R * S)\,y \Leftrightarrow \exists\, z \in E$ tq xRz et zSy.

A toute fonction $f : E \to E$, on associe la relation : $y\,R_f\,x \Leftrightarrow y = f(x)$.

1) Montrer que $*$ est associative, mais non commutative en général.

2) Simplifier $R_f * R_g$.

3) Est-ce que $*$ admet un élément neutre ?

solutions

Exercice 1.

1) Commutative, associative, $0 =$ élt neutre, tout élt $\neq 1$ est régulier, seul 0 est symétrisable.

2) Tout élt est symétrisable et $x^{-1} = \dfrac{x}{x-1}$.

Exercice 2.

$\exists\, b \in E$ tq $a * b * a = a$. Alors $b * a$ est neutre à droite et $a * b$ est neutre à gauche.

Exercice 3.

1) Associative, commutative, $\{e\} =$ élt neutre, A est symétrisable $\Leftrightarrow A = \{a\}$ avec a symétrisable.

2) Oui.

Exercice 4.

1) Non commutative, associative, $(1, 0) =$ élt neutre, (a, b) est régulier $\Leftrightarrow a \neq 0$, inversible $\Leftrightarrow a = \pm 1$.