Nombres complexes

Exercice 1. $\sum z_i + z_j$

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v| + |u-v| \geqslant |u| + |v|$, et déterminer les cas d'égalité.

2) Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|$.

Exercice 2. *Équations affines*

1) Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\overline{z} = c\}$.

Exercice 3. *Transformation homographique*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{cases}$

1) Montrer que f est bijective.

2) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 4.

Soient $a, b \in \mathbb{U}$ distincts et $z \in \mathbb{C}$. On note $u = \dfrac{z + ab\overline{z} - a - b}{a - b}$. Montrer que $u^2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Triangle équilatéral*

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.

2) j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

4) $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 6. *Sommets d'un carré*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a + ib = c + id$ et $a + c = b + d$.

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?

En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Exercice 7. *Configuration de points*

Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

1) z, z^2, z^4 sont alignés.

2) $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.

3) $z, \dfrac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Exercice 8. $a + b + c = 1$

Trouver $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

Exercice 9. $u + v + w = 0$

Soient u, v, w trois complexes unitaires tels que $u+v+w = 0$. Montrer que $u = jv = j^2 w$ ou $u = jw = j^2 v$.

Exercice 10. $z + 1/z = 2$

Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left| z + \dfrac{1}{z} \right| = 2$.

Exercice 11. *Symétrique par rapport à une droite*

Les points A, B, M ayant pour affixes a, b, z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Exercice 12. *Orthocentre*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\dfrac{d-a}{b-c}, \dfrac{d-b}{c-a}, \dfrac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Exercice 13. *Similitudes dans un triangle*

On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité.

Exercice 14. *Centre du cercle circonscrit*

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, affixes de points A, B, C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a, b, c.

Exercice 15. *Sphère de $\mathbb{R}^3$*

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u + v \neq 0$. On pose $x = \dfrac{1+uv}{u+v}$, $y = i\dfrac{1-uv}{u+v}$, $z = \dfrac{u-v}{u+v}$.

1) CNS sur u et v pour que x, y, z soient réels ?

2) On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x, y, z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.

3) A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Exercice 16. *Racines de l'unité*

Résoudre :

1) $(z+1)^n = (z-1)^n$.

2) $(z+1)^n = z^n = 1$.

3) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

4) $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

5) $\overline{z} = z^{n-1}$.

6) $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \dfrac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.

7) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Exercice 17. *Sommes sur les racines de l'unité*

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer :

1) $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

2) $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=k}^{n-1}\binom{\ell}{k}\omega^{k+\ell}$.

Exercice 18. *Somme des puissances p-èmes des racines de l'unité*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de 1.

1) Calculer $\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $M = \max\{|P(x)|,\ x \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que tous les coefficients de P sont bornés par M.

Exercice 19. $\sum \omega^{k^2}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}$. On demande de calculer $|Z|^2$. Pour cela ...

1) Écrire $|Z|^2$ comme une somme double.

2) Regrouper les termes diagonalement en tenant compte de la périodicité de la fonction $k \mapsto \omega^k$.

3) Terminer le calcul.

Exercice 20. $e^{2i\pi/7}$

Soit $z = e^{2i\pi/7}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1) Calculer $u + v$ et u^2.

2) En déduire $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$.

Exercice 21. *Calcul de produit*

Simplifier $x = \prod_{p=2}^{n}\left(\dfrac{p^3-1}{p^3+1}\right)$ en utilisant $1, j, j^2$.

Exercice 22. *Position des racines carrées*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p, q ses racines carrées. A quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

Exercice 23. *Équations du second degré*
Résoudre dans $\mathbb{C}$:
1) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.
2) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Exercice 24. *Équation du second degré*
Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation : $z^2 - (2 + im)z - (1 + im) = 0$ admette deux racines imaginaires conjuguées ?

Exercice 25. *Équation du second degré*
1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que $(|u|^2 - |v|^2)^2 = \frac{1}{4}(|u + v|^2 + |u - v|^2)^2 - 4|uv|^2$.
2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ aient même module ?

Exercice 26. *Moyennes géométrique et arithmétique*
1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.
2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha| + |\beta| = |m + \mu| + |m - \mu|$.

Exercice 27. *Somme de coefficients binomiaux*
A l'aide de formules du binôme, simplifier :
1) $\sum_{k=0}^{[n/3]} \binom{n}{3k}$.
2) $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-3)^k$.
3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.
4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k + 1)\theta$.
5) $\cos a + \binom{n}{1} \cos(a + b) + \binom{n}{2} \cos(a + 2b) + \ldots + \binom{n}{n} \cos(a + nb)$.

Exercice 28. *Sommes trigonométriques*
Simplifier :
1) $\sum_{k=0}^{n} k \cos(k\theta)$.
2) $\sum_{k=1}^{n} \sin^3(k\theta)$.

Exercice 29. *Équation trigonométrique*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre : $\begin{cases} \cos(a) + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0. \end{cases}$

Exercice 30. $\sum \cos^{2p}(x + k\pi/2p)$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
1) Simplifier $\cos^4 \theta + \cos^4(\theta + \frac{\pi}{4}) + \cos^4(\theta + \frac{2\pi}{4}) + \cos^4(\theta + \frac{3\pi}{4})$.
2) Simplifier $\cos^6 \theta + \cos^6(\theta + \frac{\pi}{6}) + \ldots + \cos^6(\theta + \frac{5\pi}{6})$.
3) Simplifier $\cos^{2p} \theta + \cos^{2p}(\theta + \frac{\pi}{2p}) + \ldots + \cos^{2p}(\theta + \frac{(2p-1)\pi}{2p})$.

Exercice 31. $\sum \cos(kx)/\cos x^k = 0$
Résoudre : $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Exercice 32. $\sum \binom{n}{k} x^{n-k} \cos(k\alpha) = 0$
Résoudre en x : $x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cos\alpha + \ldots + \binom{n}{n} \cos(n\alpha) = 0$.

Exercice 33. $\sum 2^{-k}/\cos\theta \ldots \cos(2^k\theta)$
Simplifier $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k \cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \ldots \cos 2^{k-1}\theta}$.

Exercice 34. *Calcul de* $\tan(nx)$
Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(nx)$ en fonction de $\tan x$.

Exercice 35. $z = (1 + ia)/(1 - ia)$
Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \dfrac{1 + ia}{1 - ia}$?

Exercice 36. *Homographies, Centrale MP 2012*

On note $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $c \neq 0$ on pose $f(z) = \dfrac{az-b}{cz-d}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{d/c\}$, $f(d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.

2) Montrer qu'il existe z_0, z_1, z_2 tels que $f(z) = z_1 + \dfrac{z_2}{z - z_0}$, $f(\infty) = z_1$ et $f(z_0) = \infty$.

3) On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\}$, $P = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \Im(z) > 0\}$ et $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Montrer que $f(P) = D$.

4) $f(z) = \dfrac{az-b}{cz-d}$.

Déterminer toutes les fonctions de ce type telles que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$.

solutions

Exercice 1.

1) $|u+v|+|u-v| \geqslant 2|u|$ et $|u+v|+|u-v| \geqslant 2|v|$. Il y a égalité ssi $u = \pm v$.

2) $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$,
$|z_1-z_2|+|z_3-z_4| \leqslant |z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4| \leqslant |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$.

Exercice 2.

2) si $|a| \neq |b|$: une solution unique, si $|a| = |b|$: une droite ou $\varnothing$.

Exercice 3.

2) $\mathbb{U} \setminus \{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 4.

$\overline{u} = -u$.

Exercice 6.

Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires ; c'est un carré.

Exercice 7.

1) $z \in \mathbb{R}$ ou $\Re z = -\frac{1}{2}$.

2) $z \in -1+i\mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$ ou $|z+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

3) $z \in i\mathbb{R}$ ou $|z-i| = \sqrt{2}$.

Exercice 8.

$(0, a, a+b, a+b+c=1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés : $\{a,b,c\} = \{1, i, -i\}$.

Exercice 10.

Poser $z = x+iy$. On trouve les cercles de centre $\pm i$ et de rayon $\sqrt{2}$ (laborieux).

Exercice 11.

$z' = \dfrac{(b-a)\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b}{\overline{b} - \overline{a}}$.

Exercice 12.

$d =$ orthocentre de abc.

Exercice 14.

$\omega = \dfrac{a(c\overline{c} - b\overline{b}) + b(a\overline{a} - c\overline{c}) + c(b\overline{b} - a\overline{a})}{a(\overline{c} - \overline{b}) + b(\overline{a} - \overline{c}) + c(\overline{b} - \overline{a})}$.

Exercice 15.

1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha v$.
$x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = 1/|v|^2 \Leftrightarrow u = 1/\overline{v}$.

3) il manque seulement les deux pôles.

Exercice 16.

1) $z = -i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}$.

2) Si $6 \mid n$ alors $z = j$ ou j^2. Sinon il n'y a pas de solution.

3) $z = \exp \dfrac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$.

4) $z = -1$ ou $z = \exp \dfrac{2ik\pi}{n}$, $1 \leqslant k < n$.

6) $x = \tan\left(\dfrac{a+2k\pi}{n}\right)$.

7) $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Exercice 17.

1) développer. $S = 2n$.

2) $\dfrac{1-(1+\omega)^n}{1-\omega-\omega^2} = \dfrac{1+(2\cos(\pi/n))^n}{1-\omega-\omega^2}$.

Exercice 18.

1) $\Sigma = n$ si $p \not\equiv 0 \pmod n$, 0 sinon.

2) $a_k = \sum_{x\in\mathbb{U}_n} \dfrac{P(x)}{nx^k}$.

Exercice 19.

3) Pour n impair, $|Z|^2 = n$. Pour n pair, $|Z|^2 = n(1+(-1)^{n/2})$.

Exercice 20.

1) $u+v=-1$, $u^2 = u+2v = -2-u$.

2) $\Sigma = \Im u = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Exercice 21.

$x = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Exercice 22.

$|z| = 1$.

Exercice 23.

1) $z_1 = -z_2 = 3-2i$, $z_3 = -z_4 = 1-i$.

2) $z = 1 \pm 2i$, $z = -4 \pm 2i$.

Exercice 24.

$m = 2i$.

Exercice 25.

2) $\alpha = 0$ ou $\beta = t\alpha^2$, $t \geqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 26.

2) élever au carré : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m-\mu|^2 + |m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2} + 2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Exercice 27.

1) $\dfrac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$.

2) $2^n\cos(n\pi/3)$.

3) $\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n \cos\dfrac{n\theta}{2}$.

4) $\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n \sin\dfrac{(n+2)\theta}{2}$.

5) $\left(2\cos\dfrac{b}{2}\right)^n \cos\left(a+\dfrac{nb}{2}\right)$.

Exercice 28.

1) $\dfrac{n\sin\left(\dfrac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{n\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

2) $\dfrac{3\sin(n\theta/2)\sin\big((n+1)\theta/2\big)}{4\sin(\theta/2)} - \dfrac{\sin(3n\theta/2)\sin\big(3(n+1)\theta/2\big)}{4\sin(3\theta/2)}$.

Exercice 29.

$x \equiv -y \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Exercice 30.

1) $S = \frac{3}{2}$.

2) $32\cos^6(\theta) = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$. $S = \frac{15}{8}$.

3) $S_p = \dfrac{p}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p}$.

Exercice 31.

$x \equiv 0 \pmod{\dfrac{\pi}{n}}$, $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Exercice 32.

$(x+e^{i\alpha})^n + (x+e^{-i\alpha})^n = 0 \Leftrightarrow x = \operatorname{cotan}(\frac{(2k+1)\pi}{2n})\sin\alpha - \cos\alpha$.

Exercice 33.

$S = \dfrac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}} + \dfrac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}} + \ldots + \dfrac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}$.

$\dfrac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}} + \dfrac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}} = \dfrac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}$.

$\dfrac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}} + \dfrac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}} = \dfrac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}} \ldots$

$S = \dfrac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}} = \dfrac{\sin((2^n-1)\theta)}{\sin(2^n\theta)}$.

Exercice 34.

$\tan(nx) = \dfrac{\binom{n}{1}\tan x - \binom{n}{3}\tan^3 x + \ldots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\tan^2 x + \ldots}$.

Exercice 35.

$z = e^{i\theta}$, $a = \tan\frac{\theta}{2}$ pour $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Exercice 36.

1) En écrivant $f(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{ad-bc}{c(cz-d)}$ on voit facilement que f est bijective si et seulement si $ad-bc \neq 0$.

2) L'écriture de la question précédente donne $z_1 = \dfrac{a}{c}$, $z_0 = \dfrac{d}{c}$ et $z_2 = \dfrac{ad-bc}{c^2}$.

3) Soit $z \in P$. On a $|f(z)|^2 = \dfrac{|z|^2+1-2\Im(z)}{|z|^2+1+2\Im(z)} < 1$ car $\Im(z) > 0$. On a donc $f(P) \subset D$. Soit $Z \in D$ et z tel que $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i} = Z$. On a alors $z = -i\dfrac{Z+1}{Z-1}$ et l'on obtient $\Im(z) = \dfrac{1-|Z|^2}{|Z-1|^2}$. On en déduit que $z \in P$, puis que $f(P) = D$.

4) Il est plus facile de trouver les fonctions réciproques, donc celles qui vérifient $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{U}$. On doit avoir, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|a\lambda - b|^2 = |c\lambda - d|^2$. En développant on obtient $|a| = |c|$, $|b| = |d|$ et $\Re(\bar{a}b) = \Re(\bar{c}d)$. Quitte à multiplier par $e^{-i\alpha}$, on peut supposer $a = c$, puis mettre a en facteur. On se ramène donc à f^{-1} de la forme $g(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-\gamma}{z-\delta}$. On a alors $|\gamma| = |\delta|$ et $\Re(\gamma) = \Re(\delta)$. On en déduit que $\delta = \overline{\gamma}$ (le cas $\delta = \gamma$ est impossible car g est bijective. Finalement $g(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-\gamma}{z-\overline{\gamma}}$, avec $\gamma \notin \mathbb{R}$. En calculant la fonction réciproque on obtient $f(z) = \dfrac{\overline{\gamma}z - e^{i\alpha}\gamma}{z - e^{i\alpha}}$. On vérifie bien que $f(e^{i\theta}) = \dfrac{\overline{\gamma} + \gamma - e^{i(\alpha-\theta)} - e^{i(\theta-\alpha)}}{|e^{i\theta} - e^{i\alpha}|^2} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.