Coefficients du binôme

Exercice 1. *Calcul de sommes*
Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 2. *Calcul de sommes*
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$.
1) Vérifier que $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$ pour $p \leqslant k \leqslant n$.
2) Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p}$.
3) En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p = 0$ si $p < n$.

Exercice 3. *Calcul de sommes*
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{n}{k}$.

Exercice 4. *Sommes de cardinaux*
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer $\sum_{A\subset E} \operatorname{card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{card}(A\cap B)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{card}(A\cup B)$.

Exercice 5. *Sommes d'entiers*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i+j=n} ij$ et $\sum_{i+j+k=n} ijk$.

Exercice 6. *Combinaisons avec répétitions*
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1+\ldots+x_n = p$.
1) Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.
2) Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^{p} + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1+\ldots+x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).
3) En déduire que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ si $(n,p) \neq (0,0)$.

Exercice 7. *Sommes de coefficients du binôme*
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.

Exercice 8. $\binom{n}{p}$ *maximal*
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer pour quelle valeur de p le nombre $\binom{n}{p}$ est maximal (on étudiera le rapport $\binom{n}{p}/\binom{n}{p+1}$).

Exercice 9. *Parité de* $\binom{n}{p}$
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.
1) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Vérifier que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2) En déduire que : $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k}$ est pair.
3) En déduire que : $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\binom{n-1}{k}$ est impair.

Exercice 10. *Formule de Vandermonde*
Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$ ...
1) En calculant de deux manières $(1+x)^a(1+x)^b$.
2) En cherchant le nombre de parties de cardinal c dans $E\cup F$, où E et F sont des ensembles disjoints de cardinaux a et b.
3) Application : Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{n}{p+k} = \binom{n+q}{p+q}$.

Exercice 11. *Formule d'inversion*
Soit (x_n) une suite de réels. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x_k$. Montrer que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}y_k$.

Exercice 12. *Suite de Fibonacci*
Soit $u_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n-p}{p}$. Montrer que $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

solutions

Exercice 1.

$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 2.

2) 0 si $p < n$, $(-1)^n$ si $p = n$.

Exercice 3.

$(-1)^p\binom{n-1}{p}$.

Exercice 4.

$n2^{n-1}$, $n4^{n-1}$, $3n4^{n-1}$.

Exercice 5.

$\frac{n(n^2-1)}{6}$, $\frac{n(n^2-1)(3n^2-12)}{360}$.

Exercice 6.

1) $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.

Exercice 8.

$p = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.