Transformations orthogonales

Exercice 1. *Changement de base unitaire*
Soit E un ev hermitien et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Montrer que ${}^t\overline{P}P = I$. Que peut-on dire de $\det P$?

Exercice 2. *Isométries affines*
Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.
1) On suppose que f conserve le produit scalaire. Démontrer que f est linéaire.
2) On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall\, x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Démontrer que $f = f(0) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 3. *Projection sur* $\mathrm{vect}(u)$
Soient E un espace euclidien et u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.
1) Montrer que $U{}^tU$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{vect}(u)$.
2) Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 4. $x + \lambda(x \mid v)v$
Soient E un espace euclidien, $v \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $x \in E$:$f(x) = x + \lambda(x \mid v)v$.
Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître alors f.

Exercice 5. *f normal,* $f^2 = -\,\mathrm{id}$
Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\,\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.

Exercice 6. *Centrale MP 2003*
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c de sorte que f soit une isométrie, et la préciser.

Exercice 7. *Composition de symétries*
Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

Exercice 8. *Composition de symétries*
Soient F, G deux sous-espaces d'un ev euclidien E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

Exercice 9. *Condition pour que deux réflexions commutent*
Soient E un espace euclidien, H, K deux hyperplans de E et s_H, s_K les symétries associées. Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 10. *Similitudes*
Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\, x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.
1) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E$, $(f(x) \mid f(y)) = \lambda^2(x \mid y)$.
2) Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.
3) Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\, x, y \in E$, $x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$.

Exercice 11. *Similitudes*
On définit l'application $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. Trouvez les matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A on ait $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$.

Exercice 12. *Sev stables*
Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sev stable par u. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u.

Exercice 13. *Projection sur le sous-espace invariant*

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. On note $v = \mathrm{id}_E - u$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

2) Soit p la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer que : $\forall\, x \in E,\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p(x)$.

Exercice 14. *Endomorphismes orthogonaux diagonalisables*

Quels sont-ils ?

Exercice 15. *Valeurs propres d'une isométrie*

Soient E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{O}(E)$.

1) On suppose n impair et $f \in \mathcal{O}^+(E)$. Montrer que 1 est valeur propre de f (comparer $\det(f - \mathrm{id})$ et $\det(f^{-1} - \mathrm{id})$).

2) Que peut-on dire quand n est pair ?

3) Soit n quelconque, $f \in \mathcal{O}^-(E)$. Montrer que -1 est valeur propre de f.

Exercice 16. *Caractérisation des symétries orthogonales*

Soit $M \in \mathcal{O}(n)$.

1) Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si M est symétrique.

2) Dans ce cas, déterminer la base et la direction de cette symétrie en fonction des matrices $I + M$ et $I - M$.

Exercice 17. *f orthogonal antisymétrique*

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ f(x) \perp x \Leftrightarrow \forall\, x, y \in E,\ (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y)).$$

Exercice 18. *Centre de O(E)*

Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{O}(E)$ et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $u \in H^{\perp}$, $u \neq 0$.

1) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.

2) En déduire que f et s commutent si et seulement si u est vecteur propre de f.

3) Quel est le centre de $O(E)$?

Exercice 19. *Nombre de réflexions nécéssaires pour engendrer une application donnée*

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. On note $F = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $p = \operatorname{codim}(F)$.

1) Montrer qu'on peut décomposer f en produit d'au plus p réflexions.

2) Inversement, si f est un produit de k réflexions, démontrer que $p \leqslant k$.

3) Application : trouver $f \in \mathcal{O}(E)$ qui se décompose en n réflexions et pas moins.

Exercice 20. *Prolongement d'une transformation orthogonale*

Soient E un espace euclidien.

1) Soit F un sev de E et $f : F \to E$ une application orthogonale. Démontrer qu'on peut prolonger f en une application orthogonale de E dans E.

2) Soient $u_1, \dots, u_n$, $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E tels que : $\forall\, i, j,\ (u_i \mid u_j) = (v_i \mid v_j)$.

a) Si $\sum \lambda_i u_i = 0$, démontrer que $\sum \lambda_i v_i = 0$.

b) En déduire qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que : $\forall\, i,\ f(u_i) = v_i$.

Exercice 21. *Action de $\mathcal{O}(E)$ sur les sev*

Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E de mêmes dimensions.

1) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.

2) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 22. *Transformations orthogonales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$.

1) Vérifier que c'est un produit scalaire.

2) Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

3) Réciproquement, si φ_P ou $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathcal{O}(n)$?

Exercice 23. $A = \mathrm{com}(A)$

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

Exercice 24. $A^tA + A + {}^tA = 0$

1) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^tA + A + {}^tA = 0$.

2) Montrer que pour une telle matrice, $|\det A| \leqslant 2^n$.

Exercice 25. *Somme des coefficients d'une matrice orthogonale*

Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. démontrer que : $|\sum_{i,j} P_{ij}| \leqslant n$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 26. *Groupe engendré par les réflexions*

Soit E un espace vectoriel hermitien et G le sous-groupe de $\mathcal{U}(E)$ engendré par les réflexions.

1) On suppose ici $\dim E \geqslant 2$. Soient $u, v \in E$. Montrer qu'il existe une réflexion σ échangeant u et v si et seulement si $\|u\| = \|v\|$ et $(u \mid v) \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que $G = \{f \in \mathcal{U}(E) \text{ tq } \det(f) \in \{-1, 1\}\}$.

Exercice 27. *Orthotrigonalisation*

Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien est trigonalisable en base orthonormale.

Exercice 28. *Réduction des endomorphismes orthogonaux et unitaires*

1) Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$. Si $M \in G$ montrer que $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{U}$. En déduire que tout élément de G est diagonalisable.

2) Soit $M \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ propre pour M.

3) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale par blocs : $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, R_1, \dots, R_k)$ où R_i est une matrice de la forme : $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

Exercice 29. *Groupes orthogonaux égaux*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes euclidiennes telles que les groupes orthogonaux associés sont égaux. Que peut-on dire de ces normes ?

Exercice 30. *Densité, Ens Ulm MP* 2003*

$\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 31. *Famille obtusangle, X 2015*

Soient $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tels que $(vi \mid v_j) = -1$ pour tous i, j distincts.

1) Trouver pour $n = 2$ un exemple d'une telle suite.

2) Soit $p_i = 1/(\|v_i\|^2 + 1)$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n+1} p_i v_i = 0$.

3) Montrer que toute sous-famille stricte de $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est libre.

4) Soient $w_1, \dots, w_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ telle que $(w_i \mid w_j) = -1$ pour tous i, j distincts et $\|w_i\| = \|v_i\|$ pour tout i. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(v_i) = w_i$ pour tout i.

Exercice 32. *X 2014*

1) Soient $u, v \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $u + v = 2\,\mathrm{id}$. Montrer que $u = v = \mathrm{id}$.

2) Que dire de $u, v \in O_n(\mathbb{R})$ et $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $umu^{-1} + vmv^{-1} = 2m$?

Exercice 33. *Mines 2016*

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est inversible et ${}^tM + M^2 = 0$. Montrer que M est la matrice d'une application conservant le produit scalaire et déterminer celle-ci.

Exercice 34. *ENS 2017*

Quels sont les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO(n), \times)$? *Indication : commencer par les morphismes de classe $\mathcal{C}^1$.*

solutions

Exercice 4.
$\lambda = 0$, $f = \mathrm{id}_E$ et $\lambda = -\dfrac{2}{\|v\|^2}$, $f =$ la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(v)$.

Exercice 5.
$h = f \circ f^* : h^2 = \mathrm{id}$ et $h \geqslant 0 \Rightarrow h = \mathrm{id}$.

Exercice 6.
${}^tAA = I \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dans ce cas $\det(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$ donc f est un quart de tour. L'axe du quart de tour est engendré par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice 11.
$\varphi(A) = \mathrm{tr}(A\,{}^tA)$ donc pour toute matrice P telle que $P\,{}^tP$ soit scalaire (non nulle) on a $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$. Ces matrices sont les matrices de la forme $P = \lambda M$ avec M orthogonale (matrices de similitude).

Réciproquement, soit P telle que $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$ et $Q = P\,{}^tP$.
On a par polarisation : $\forall\, A, B$, $\mathrm{tr}(AQ\,{}^tB\,{}^tQ^{-1}) = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$
donc pour $B = QC$: $\forall\, A, C$, $\mathrm{tr}(AQ^tC) = \mathrm{tr}(A^tCQ)$
ce qui implique : $\forall\, C$, $Q^tC = {}^tCQ$ et donc que Q est scalaire.

Exercice 21.
2) On raisonne par récurrence sur $d = \dim(F) = \dim(G)$. Pour $d = 0$ il n'y a rien à prouver.
Pour $d \geqslant 1$ on considère $a \in F$ et $b \in G$ unitaires tels que $(a \mid b)$ soit maximal. Soient F_1 l'orthogonal de a dans F et G_1 l'orthogonal de b dans G (sev de dimensions égales à $d-1$). Le choix de a, b fait que F_1 est orthogonal à b et G_1 est orthogonal à a, donc F_1 et G_1 sont tous deux inclus dans l'orthogonal de $\mathrm{vect}(a, b)$. On peut trouver un endomorphisme de cet orthogonal qui échange F_1 et G_1, que l'on complète par la symétrie orthogonale dans $\mathrm{vect}(a, b)$ qui échange a et b.

Exercice 22.
3) oui pour φ_P.
Pour ψ_P : $\forall\, A, B$, $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc $P\,{}^tP$ est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Exercice 23.
$A = 0$ ou $A \in \mathcal{O}^+(n)$.

Exercice 24.
1) $A = P - I$, $P \in \mathcal{O}(n)$.
2) Hadamard.

Exercice 26.
2) Tout $f \in G$ vérifie $\det(f) \in \{-1, 1\}$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{U}(E)$ tq $\det(f) \in \{-1, 1\}$ et $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. On montre que f est composée de réflexions par récurrence sur $p = \mathrm{codim}(F)$.

$p = 0 \Rightarrow f = \mathrm{id}$. $p = 1 \Rightarrow f$ est une réflexion car F est un hyperplan et $F^\perp$ est stable par f.

$0, \dots, p-1 \Rightarrow p$: soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E telle que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une BON de F et e_1 est vecteur propre de f. Soit $e_1' = f(e_1) = \lambda e_1$, et σ, σ' deux réflexions telles que $\sigma(e_1) = e_2$ et $\sigma'(e_2) = e_1'$. Alors $g = \sigma \circ \sigma' \circ f \in \mathcal{U}(E)$, $\det(g) = \det(f) \in \{-1, 1\}$ et $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})) < p$ donc g est composée de réflexions et f aussi.

Exercice 30.

Oui. Pour $n = 1$ il y a égalité. Pour $n = 2$ cela résulte de la densité de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$ (démonstration ci-dessous). Pour n quelconque, il suffit de voir qu'une réflexion quelconque est limite de réflexions à coefficients rationnels (approcher un vecteur non nul normal à l'hyperplan de réflexion par une suite de vecteurs rationnels).

Densité de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{U}$: pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère $z_p = \dfrac{(p^2 - 1) + 2ip}{p^2 + 1}$. On a $z_p \in \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ et $z_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 1$. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $d(z, \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]) \leqslant d(z, \{z_p^k,\ k \in \mathbb{Z}\}) \leqslant \frac{1}{2}|1 - z_p|$.

Exercice 31.

1) Un vecteur de norme $\sqrt{2}$ et ses images par les rotations d'angles $\pm\frac{2\pi}{3}$.

2) La famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est liée : soit $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls. On a, en notant $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$:

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i \;\Big|\; v_j\Big) = \alpha_j \|v_j\|^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i = \alpha_j(\|v_j\|^2 + 1) - \alpha = \frac{\alpha_j}{p_j} - \alpha.$$

d'où $\alpha_j = p_j \alpha$. α est non nul sinon tous les α_j le seraient, donc $p_j = \alpha_j / \alpha$, ce qui donne les relations demandées.

3) D'après la question précédente, toute liste de coefficients α_i telle que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ est proportionnelle à $(p_1, \dots, p_{n+1})$. Comme aucun p_i n'est nul, il n'existe pas de relation de dépendance dans une sous-famille stricte.

4) Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique application linéaire f vérifiant $f(v_i) = w_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On alors $f(v_{n+1}) = f(-\sum_{i=1}^n p_i v_i / p_{n+1}) = -\sum_{i=1}^n p_i w_i / p_{n+1} = w_{n+1}$. Par ailleurs, la relation $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$ est vraie pour tous $x, y \in \{v_1, \dots, v_n\}$ donc par bilinéarité, elle est vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 32.

1) Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(u(x) \mid x) \leqslant \|x\|^2$ et $(v(x) \mid x) \leqslant \|x\|^2$. Comme $u + v = 2\,\mathrm{id}$, $(u(x) \mid x) + (v(x) \mid x) = 2\|x\|^2$ donc on est dans le cas d'égalité, d'où $x, u(x), v(x)$ sont colinéaires de même sens et ont même norme, donc sont égaux.

2) Matriciellement, $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$. En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, les applications $A \mapsto UAU^{-1}$ et $A \mapsto VBV^{-1}$ sont orthogonales donc, en reprenant les calculs précédents, il vient $UMU^{-1} = VMV^{-1}M = M$, soit : m commute avec u et v.

Exercice 33.

${}^tM = -M^2$ donc $M^4 = ({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = -M$ et $M^3 = -I_3$ puisque M est inversible. Il vient alors ${}^tM\,M = I_3$, soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det(M)^3 = \det(-I_3) = -1$ donc $\det(M) = -1$.

Ainsi M est une matrice de réflexion ou une matrice d'anti-rotation et est ortho-semblable à une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La relation ${}^tM = -M^2$ donne $3\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, donc M est de la forme $P\begin{pmatrix} R_{\pi/3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tP$ avec $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ ou $M = -I_3$ et la réciproque est immédiate.

Exercice 34.

On connaît tous les morphismes continus à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$: $t \mapsto \exp(tA)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceux à valeurs dans $SO(n)$ correspondent au cas : A antisymétrique.