Formes quadratiques

Exercice 1. *Étude de signe*

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :

1) $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.

2) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.

3) $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Exercice 2. *Produit scalaire ?*

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice de produit scalaire ?

Exercice 3. *Normes euclidiennes*

1) Montrer que les applications :

$$N_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+xy+y^2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad N_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{2x^2-xy+y^2} \end{array} \right.$$

sont des normes.

2) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y) \leqslant \beta N_2(x,y)$.

3) Trouver les meilleures constantes α, β (étudier si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ est positive, négative).

Exercice 4. *Calcul de signature*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Exercice 5. *Signature de ${}^tAA$*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.

2) Déterminer sa signature en fonction de $\operatorname{rg} A$.

Exercice 6. *Décomposition en carrés*

Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1} x_i^2 + \frac{1}{2}(\sum_{i\geqslant 1} x_i)^2.$$

On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \ldots + x_n)/(i+1)$.

Exercice 7. *Rang d'une décomposition en carrés*

Soit q une forme quadratique sur un ev E de dimension finie et $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \ldots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\operatorname{rg}(f_1,\dots,f_p) \geqslant \operatorname{rg}(q)$.

Exercice 8. *Différentielle d'une forme quadratique*

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.

Montrer que : $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}q_x(y) = 2f(x,y)$.

Exercice 9. $q(a)q(x) - f^2(a,x)$

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1) Montrer que φ est une forme quadratique sur E.

2) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.

3) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

Exercice 10. $\mathrm{tr}(A^2)$

Soit pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature (indication : étudier les restrictions de q aux sev des matrices symétriques et antisymétriques).

Exercice 11. *Adjoint*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

1) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, x, y \in E,\ f(u(x), y) = f(x, v(y)).$$

On note $v = u^*$.

2) Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est un anti-isomorphisme involutif de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire tel que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ et $u^{**} = u$).

Exercice 12. *Restriction d'une forme quadratique à un sev*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et q une forme quadratique sur E de signature $(n-1, 1)$. Soit H un sev de E de dimension $d \geqslant 1$.

1) On suppose qu'il existe $x \in H$ tel que $q(x) < 0$. Montrer que la signature de $q_{|H}$ est $(d-1, 1)$.

2) On suppose que $q_{|H}$ est positive, quelle est sa signature ?

Exercice 13. *Mineurs principaux*

Soit $n \geqslant 2$ et A une matrice réelle symétrique $n \times n$. représentant une forme quadratique q. On appelle mineurs principaux de A les déterminants :

$$\varDelta_k(A) = \det((a_{i,j})_{i,j \leqslant k}).$$

On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, montrer que la signature de q est (r, s) où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, \varDelta_1, \dots, \varDelta_n)$ et $r = n - s$.

Exercice 14. *Diagonale dominante*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On dit que A est à diagonale faiblement dominante si pour tout i on a $a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ et que A est à diagonale fortement dominante si pour tout i on a $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que si A est à diagonale fortement dominante alors A est définie positive et si A est à diagonale faiblement dominante alors A est positive. Indication : utiliser l'exercice **13**.

Exercice 15. *Formes quadratiques de signature donnée*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n, on note :

$\mathrm{Quad}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E ;
$\mathrm{Quad}^*(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de rang n ;
$\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p, q).

1) Montrer que $\mathrm{Quad}^*(E)$ est dense dans $\mathrm{Quad}(E)$.

2) Montrer que si $p + q = n$ alors $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{Quad}(E)$.

3) Montrer que $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ est connexe par arcs.

Exercice 16. $1/(\lambda_i + \lambda_j)$

1) Soit $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues de carrés intégrables sur l'intervalle I. On pose $a_{i,j} = \int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive ssi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

2) En déduire que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts alors la matrice de terme général $1/(\lambda_i + \lambda_j)$ est définie positive.

Exercice 17. *Matrice des inverses*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous non nuls. On note A' la matrice de coefficient général $1/a_{i,j}$.

1) Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques définies positives (examiner les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = n$).

2) Trouver les matrices A telles que A et A' sont symétriques positives (examiner les cas $n = 2$, $n = 3$, $n = n$).

Exercice 18. *Centrale MP 2000*

Soit S une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, symétrique définie positive. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $q : X \mapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ est définie négative.

Exercice 19. *Polytechnique MP* 2000*

On considère sur $\mathbb{R}^n$ la forme quadratique définie par : $q(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x|a)^2$ où $\alpha > 0$, β est réel et $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter de la signature et du rang de q.

Exercice 20. *Ensae MP* 2000*

Soit q une forme quadratique non nulle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $q(AB) = q(A)q(B)$. Déterminer q.

Exercice 21. *Déterminant de Gram, X MP* 2005*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E et φ une forme bilinéaire symétrique positive.

Montrer que $\det^2[\varphi(x_i, y_j)] \leqslant \det[\varphi(x_i, x_j)] \times \det[\varphi(y_i, y_j)]$.

solutions

Exercice 1.

1) Oui ssi $\lambda^2 + \mu^2 \leqslant 1$.

2) Non, disc $= -1$.

3) Oui, $= \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{3}(x+3y)^2 + 4z^2 + \frac{1}{4}(x+2t)^2$.

Exercice 2.

Oui, $\mathrm{sp}(A) = \{6, 3, 3\}$.

Exercice 3.

3) $\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Exercice 4.

$(n-1, 0)$.

Exercice 6.

Récurrence, $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<k} \frac{i+1}{2i} y_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant k} x_i^2 + \frac{1}{2k}\Big(\sum_{i\geqslant k} x_i\Big)^2$.

Exercice 9.

3) Si $a \in \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi} = E$.
Si $a \notin \mathrm{Ker}\, f$ et $q(a) = 0$, $\mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi} = a^{\perp}$.
Si $q(a) \neq 0$, $\mathrm{Ker}\, \tilde{\varphi} = \mathrm{Ker}(f) \oplus < a >$.

Exercice 12.

2) $(d-1, 0)$ ou $(d, 0)$.

Exercice 13.

récurrence sur n.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n} \alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Alors A a mêmes mineurs principaux que la matrice de q dans la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, u_n)$.

Exercice 14.

Pour A à diagonale fortement dominante, récurrence sur n.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base dans laquelle A est la matrice de q. $\Delta_{n-1}(A) \neq 0$ donc il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n} \alpha_i e_i$ soit q-orthogonal à $e_1, \ldots, e_{n-1}$ et il faut montrer que $q(u_n) > 0$ ce qui résulte de $|\alpha_i| \leqslant 1$ en considérant la i-ème ligne de A.

Exercice 15.

3) $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

Exercice 17.

1) Il n'y a pas de solution pour $n = 2$ donc pas non plus pour $n > 2$.

2) Pour $n = 3$ on trouve $A = {}^tCC$ où C est une colonne sans zéros, pour $n \geqslant 3$ on obtient le même résultat en considérant les blocs 3×3 centrés sur la diagonale.

Exercice 18.

Soit P orthogonale diagonalisant S : ${}^tPSP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $Y = {}^tPX$.

On a : $q(X) = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & \lambda_n \end{vmatrix} = -\lambda_1 \ldots \lambda_n \Big(\dfrac{y_1^2}{\lambda_1} + \ldots + \dfrac{y_n^2}{\lambda_n}\Big)$.

Exercice 19.

Pour $a = 0$, q est définie positive. Pour $a \neq 0$ prendre une base orthonormale commençant par a ; la matrice de q dans cette base est $\mathrm{diag}(\alpha + \beta\|a\|^2, \alpha, \ldots, \alpha)$.

Exercice 20.

Soit (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $E_{12}^2 = 0$ donc $q(E_{12}) = 0$ et si A est une matrice quelconque de rang 1, A est équivalente à E_{12} d'où $q(A) = 0$. Si $A = 0$ on a aussi $q(A) = 0$ et si A est inversible alors toute matrice est multiple de A donc $q(A) \neq 0$, en particulier $q(I) = 1$ car $q^2(I) = q(I)$. On en déduit $q(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Pour A quelconque, les applications : $z \mapsto \det(A - zI)$ et $z \mapsto q(A - zI)$ sont polynomiales de degré 2, avec le même coefficient de z^2 et les mêmes racines, donc sont égales d'où $q = \det$.

Rmq : le même raisonnement est applicable sur un corps quelconque en se limitant aux matrices triangulaires, et toute matrice est produit de triangulaires (algorithme du pivot de Gauss).

Exercice 21.

Quitte à remplacer E par $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, y_n)$, on peut supposer E de dimension finie p. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et X, Y et F les matrices de $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ et φ dans $\mathcal{B}$.
On doit prouver $\det({}^tXFY)^2 \leqslant \det({}^tXFX)\det({}^tYFY)$. Comme F est symétrique positive, elle est de la forme $F = {}^tMM$ pour une certaine matrice carrée M, donc en remplaçant X et Y par MX et MY, il suffit de prouver $\det({}^tXY)^2 \leqslant \det({}^tXX)\det({}^tYY)$ pour toutes matrices X, Y réelles rectangulaires de même taille.

En projetant chaque colonne de Y sur le sev engendré par les colonnes de X, on peut décomposer $Y = XA + B$ où A est une matrice carrée et B une matrice rectangulaire telle que ${}^tXB = 0$. Il reste à prouver : $\det({}^tXXA)^2 \leqslant \det({}^tXX)\det({}^tA{}^tXXA + {}^tBB)$, soit : $\det({}^tA{}^tXXA) \leqslant \det({}^tA{}^tXXA + {}^tBB)$.

On pose $U = {}^tA{}^tXXA$ et $V = {}^tBB$: U et V sont des matrices réelles symétriques positives de même taille, à priori quelquonques. Si U est inversible, on écrit $U = {}^tPP$ avec P inversible et on est rammené à prouver que $1 \leqslant \det(I + {}^tP^{-1}VP^{-1}) = \det(I + W)$, avec W symétrique positive, ce qui résulte du fait que toutes les valeurs propres de $I + W$ sont supérieures ou égales à 1. Si U n'est pas inversible, on remplace U par $U + \varepsilon I$ avec $\varepsilon > 0$, puis on fait tendre ε vers 0^+.

Remarque : il y a peut-être plus simple ?