

Réduction des endomorphismes

Calculs

Exercice 1. Calcul de valeurs propres

Chercher les valeurs propres des matrices :

$$1) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin \alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Calcul de valeurs propres

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On

distinguera les cas :

- 1) $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
- 2) $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

Exercice 3. Polynômes de Chebychev

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2 \cos \theta)I)$ par récurrence.
- 2) En déduire les valeurs propres de A .

Exercice 4. Matrice tridiagonale

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Diagonalisation

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad 10) \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 15) \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 16) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Trigonalisation

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9. Calcul

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Calcul

Soit $C_{pq} = \begin{pmatrix} U_{pq} & 0 & U_{pq} \\ 0 & 0 & 0 \\ U_{pq} & 0 & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où U_{pq} est la matrice $p \times q$ dont tous les coefficients valent 1. Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$.

Exercice 11. Matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 12. Sommes par lignes ou colonnes constantes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la somme des coefficients par ligne est constante ($= S$). Montrer que S est une valeur propre de A . Même question avec la somme des coefficients par colonne.

Exercice 13. Matrices stochastiques

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j, m_{ij} \geq 0$ et $\forall i, m_{i,1} + m_{i,2} + \dots + m_{i,n} = 1$ (*matrice stochastique*).

- 1) Montrer que 1 est valeur propre de M .
- 2) Soit λ une valeur propre complexe de M . Montrer que $|\lambda| \leq 1$ (si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module). Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

Exercice 14. $(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' \end{cases}$.

- 1) Chercher la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- 2) Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 15. $(X - a)P'$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto (X - a)P' \end{cases}$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u .

Exercice 16. $X(X - 1)P' - 2nXP$

Soit $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto X(X - 1)P' - 2nXP \end{cases}$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u .

Exercice 17. $X^3P \bmod (X - a)(X - b)(X - c)$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ distincts, et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ .

Polynôme caractéristique

Exercice 28. Formules pour une matrice 3×3

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1) Vérifier que $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\text{tr } A)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A)$.
- 2) Soit λ une valeur propre de A et L_1, L_2 deux lignes non proportionnelles de $A - \lambda I$ (s'il en existe). On calcule $L = L_1 \wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X = {}^t L$. Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

Exercice 29. Recherche de vecteurs propres pour une valeur propre simple

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A telle que $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 1$.

- 1) Quelle est la dimension du sous espace propre E_λ ?
- 2) Montrer que les colonnes de ${}^t \text{com}(A - \lambda I)$ engendrent E_λ .
- 3) AN : Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 30. Éléments propres de $C^t C$

Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = C^t C$.

- 1) Chercher le rang de M .
- 2) En déduire le polynôme caractéristique de M .
- 3) M est-elle diagonalisable ?

Exercice 31. (i/j)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = i/j$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 32. Matrice compagne

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme défini par : $P_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$ avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

- 1) Montrer qu'il existe une unique racine dans \mathbb{R}^{+*} pour P_n .

- 2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Exercice 33. $I + (x_i y_j)$

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\Delta_n = \det(I + (x_i y_j))$.

Exercice 34. Centrale MP 2000

On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq b$.

- 1) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\frac{1}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
- 2) Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

Exercice 35. Centrale MP 2000

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2 + b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n + b_n \end{pmatrix}$

- 1) Calculer $\det A_n$.
- 2) Calculer χ_A , le polynôme caractéristique de A .
- 3) On suppose $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et, pour tout i , $b_i > 0$. Montrer que A_n est diagonalisable (on pourra utiliser $\chi_A(t)/\prod_{i=1}^n (a_i - t)$).
- 4) Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et, pour tout i , $b_i > 0$?

Exercice 36. Polynômes caractéristiques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A .

Exercice 37. Matrice compagne

Soit $P = X^n - (a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}) \in \mathbb{K}_n[X]$.

La matrice compagne de P est $M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans \mathcal{B} .

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique de M .
- 2) Calculer $\varphi^k(e_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
- 3) En déduire que $\mu_M = P$.

Exercice 38. $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \emptyset$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \emptyset$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Application : Soient A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

Exercice 39. Matrices à spectres disjoints

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

- a) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.
- b) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$.
- c) $\chi_B(A)$ est inversible.
- d) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 40. AB et BA ont même polynôme caractéristique

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
- 2) Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- 3) Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ ($M, N, P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$). Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

Exercice 41. X 2014

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B$ sont inversibles. Montrer que $A + 5B$ l'est.

Exercice 42. Trace

Soit l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^t M. \end{cases}$ Calculer sa trace par un moyen simple.

Exercice 43. Fermat pour la trace, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$.

Exercice 44. Facteurs irréductibles (Lacouture)

Soit \mathbb{K} un corps quelconque, $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note μ le polynôme minimal de M et χ son polynôme caractéristique. Le but de l'exercice est de prouver que μ et χ ont mêmes facteurs irréductibles.

- 1) Traiter le cas où χ est scindé.
- 2) Cas général.
 - a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ tel que

$$P(M) - P(X)I_n = (M - XI_n)R(X).$$

- b) Montrer que χ divise μ^n puis conclure.

Exercice 45. $AM + B$ et AM ont même polynôme caractéristique, Centrale MP 2012

- 1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant même polynôme caractéristique. Montrer que $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(B^2)$.
- 2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
 - (a) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM + B$ et AM ont même polynôme caractéristique ;
 - (b) B est nilpotente et $BA = 0$.

Polynôme annulateur**Exercice 46. Matrice bitriangulaire**

Donner une CNS sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 47. $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = 0$

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 48. $u^3 = u^2$

Soient E un ev de dimension finie sur \mathbb{C} et u un endomorphisme de E .

On suppose que $u^3 = u^2$, $u \neq \text{id}$, $u^2 \neq 0$, $u^2 \neq u$.

- 1) Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.
- 2) Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u .
- 3) Montrer que u n'est pas diagonalisable.
- 4) Montrer que $E = \text{Im}(u^2) \oplus \text{Ker}(u^2)$.
- 5) Montrer que $u|_F$ avec $F = \text{Im}(u^2)$ est l'identité.

Exercice 49. INT gestion 94

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $\det A$.
- 2) Calculer $(A - xI)({}^tA - xI)$ et en déduire $\chi_A(x)$.
- 3) Montrer que A est \mathbb{C} -diagonalisable.

Exercice 50. $X^n P(1/X)$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto X^n P(1/X). \end{cases}$

- 1) Déterminer $u \circ u$. En déduire que si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ alors u est diagonalisable.
- 2) Étudier le cas $\text{car}(\mathbb{K}) = 2$.
- 3) Lorsque u est diagonalisable, donner une base de vecteurs propres de u .

Exercice 51. $A = A^{-1}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer e^A ($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$).

Exercice 52. Endomorphisme de rang 1

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Exercice 53. u^2 diagonalisable

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable. Donner un contre-exemple dans un \mathbb{R} -ev.

Exercice 54. Racine p -ème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.

- 1) Montrer que B est diagonalisable.
- 2) Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Exercice 55. X 2014

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 56. p^2 est un projecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 57. $A^3 = A + I$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 58. $A^3 + A^2 + A = 0$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\text{rg } A$ est pair.

Exercice 59. $A^n = I$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$ et (I, A, \dots, A^{n-1}) est libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 60. $A^p = I$ et $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 61. $P(u) = \sum P(\lambda_i)u_i$

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
 - a) Montrer qu'il existe des endomorphismes u_1, \dots, u_p tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i$.
 - b) Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
- 2) Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i)u_i.$$

Montrer que u est diagonalisable et $\text{sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Exercice 62. Projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et f_1, \dots, f_n , n applications linéaires toutes non nulles. On suppose : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.

Exercice 63. Projecteurs spectraux

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f .

Exercice 64. Endomorphismes anticommutant, Centrale MP 2003

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u_1, \dots, u_p ($p \geq 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall k, u_k^2 = -\text{id}_E, \quad \forall k \neq \ell, u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

- 1) Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.
- 2) Montrer que n est pair.
- 3) Donner le spectre de chaque u_k .
- 4) Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k .
- 5) Calculer $\det(u_k)$.

Exercice 65. $u^2 = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.

- 1) Quelle relation y a-t-il entre $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$? Montrer que $2 \text{rg } u \leq \dim E$.
- 2) On suppose ici $\dim E = 4$ et $\text{rg } u = 2$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que :
 $u(e_1) = e_2, u(e_2) = 0, u(e_3) = e_4, u(e_4) = 0$.
- 3) On suppose $\dim E = n$ et $\text{Im } u = \text{Ker } u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

Exercice 66. Réduction de M tq $M^3 = I$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.

- 1) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?
- 2) Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 67. Centrale PSI 1998

Soient u, v, h trois endomorphismes de \mathbb{R}^n tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

- 1) Cas particulier, $n = 3$, $\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
- 2) Cas général.
 - a) Que peut-on dire de $\text{tr}(u)$ et $\text{tr}(v)$?
 - b) Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } v$ sont stables par h .
 - c) Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - d) Quel est le polynôme minimal de u ?

Exercice 68. Indépendance du polynôme minimal par rapport au corps

Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mu_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mu_{\mathbb{L}}(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans \mathbb{K} ou dans \mathbb{L} . Montrer que ces polynômes sont égaux.

Exercice 69. Trace entière, X MP* 2004

Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (P(A) = 0) \Rightarrow (\text{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Exercice 70. Valeurs propres communes

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $\text{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Exercice 71. Polynôme minimal imposé, Centrale MP 2005

Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$?

Exercice 72. $\text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$, Polytechnique MP* 2006

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P .

- 1) Si $p = 0$, que dire de u ?
- 2) Si $p = 1$, montrer que $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$.
- 3) Dans le cas général, montrer que $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.

Exercice 73. $f^2 + \alpha f + \beta \text{id} = 0$, Centrale 2015

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie $n \geq 1$. Soit $P = X^2 + \alpha X + \beta \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$. Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que f n'admet aucune valeur propre puis que n est pair.
- 2) Soit $x \in E$ non nul et $y = f(x) + \alpha x$. On note $H_x = \langle x, y \rangle$. Montrer que H_x est un plan stable par f et que c'est le plus petit sev de E stable par f et contenant x .
- 3) Prouver la propriété annoncée.

Exercice 74. $P(A)$ est nilpotente, Mines-Ponts 2015

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 75. $A^p = I_n$, Mines 2015

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^p = I_n$. On suppose de plus qu'il existe $m \geq 3$ tel que, pour tous i, j , m divise $[A - I_n]_{i,j}$. Déterminer A .

Endomorphismes de composition

Exercice 76. Équation $AM = \lambda M$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM = \lambda M$.

Exercice 77. $v \mapsto v \circ u$, Centrale MP 2003

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathcal{L}(E)$ associe $v \circ u$.

- 1) Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
- 2) Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) \Leftrightarrow (Φ_u est diagonalisable)...
 - a) en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u .
 - b) en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u .

Exercice 78. $f \mapsto p \circ f \circ p$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection et $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & p \circ f \circ p. \end{cases}$ Déterminer les éléments propres de Φ .

Exercice 79. $f \mapsto u \circ f$ et $f \mapsto f \circ u$

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

On considère les applications : $\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \varphi : f & \longmapsto & u \circ f \\ \psi : f & \longmapsto & f \circ u. \end{cases}$

- 1) Montrer que φ et ψ sont diagonalisables.
- 2) Montrer que $\varphi - \psi$ est diagonalisable.

Exercice 80. $u \circ v - v \circ u = \text{id}$

Soient \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, E un \mathbb{K} -ev non nul et u, v deux endomorphisme de E tels que $u \circ v - v \circ u = \text{id}_E$.

- 1) Simplifier $u^k \circ v - v \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis $P(u) \circ v - v \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.
- 2) Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Exercice 81. $f \circ g - g \circ f = \alpha f$

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

- 1) Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$.
- 2) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$).
- 3) Donner un contre-exemple avec $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 0$.

Exercice 82. *X MP* 2001*

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur \mathbb{K}) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Exercice 83. $\frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$, *Mines MP 2003*

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n finie, p un projecteur de rang r et

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p). \end{cases}$$

- 1) Est-ce que φ est diagonalisable ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de φ et les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 84. *Crochet de Lie, Ens Cachan MP* 2003*

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'ev tel que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi([A, B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$ où $[X, Y] = XY - YX$. Montrer : $\forall D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (D \text{ est diagonalisable}) \Leftrightarrow (\Phi(D) \text{ est diagonalisable})$.

Indication : considérer $\varphi_D : X \mapsto [D, X]$ et montrer que $(D \text{ est diagonalisable}) \Leftrightarrow (\varphi_D \text{ est diagonalisable})$.

Similitude**Exercice 85.** *Matrices réelles semblables sur \mathbb{C}*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur \mathbb{C} : Il existe $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $P + iQ \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(P + iQ)A = B(P + iQ)$.

- 1) Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (P + \lambda Q)A = B(P + \lambda Q)$.
- 2) En déduire que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

Exercice 86. *Trigonalisation de matrices*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

- 1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
- 2) Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
- 3) Compléter ces vecteurs en une base de \mathbb{R}^3 .
- 4) Écrire la matrice de φ dans cette base.
- 5) Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.

Exercice 87. *Somme de projecteurs*

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des projecteurs $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que : $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k$ et $\forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 88. A^3 est semblable à A^4

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :

- 1) A a trois valeurs propres distinctes.
- 2) A a deux valeurs propres distinctes
- 3) A a une seule valeur propre.

Exercice 89. *Décomposition de Dunford*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$.

Exercice 90. *Réduction de Jordan, Mines MP 2003*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{sp}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id})) = 2$.

Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 91. A et $2A$ sont semblables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.

Usage de la réduction

Exercice 92. *Ensi PC 1999*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n .

2) Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n .

3) Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exercice 93. *Puissances de A*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres 1, -2, 2, et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

2) On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1, P(2) = 2^n, P(-2) = (-2)^n$.

3) En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exercice 94. *Suites récurrentes linéaires*

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A . En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n .

Exercice 95. *Endomorphisme cyclique*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

1) On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$.
Que dire de E et f ?

2) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Exercice 96. *Suite de points*

Soit (M_n) une suite de points dans le plan, de coordonnées (x_n, y_n) définies par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = -x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = -3x_n + 4y_n.$$

1) Montrer que, quelque soit M_0 , les points M_n sont alignés.

2) Étudier la suite (M_n) quand n tend vers l'infini.

3) Quelle est la limite de y_n/x_n (utiliser une méthode géométrique) ?

Exercice 97. *Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes*

1) Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.

a) Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale.

b) Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A .

Exercice 98. $XY = YX = A$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $XY = YX = A$.

Exercice 99. *Racine carrée*

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 100. Racine carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B différente de A et $-A$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 101. Commutant

- 1) Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 2) Même question, en considérant $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.

Exercice 102. Commutant, Centrale MP 2000

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A .

- 1) Pour $n = 2$, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est de dimension $\geq n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Exercice 103. Ulm MP* 2001

En se déplaçant uniquement sur les arêtes d'un cube de côté 1, combien y a-t-il de chemins de longueur n pour aller d'un point à un autre ?

Réduction par blocs**Exercice 104. Matrice bloc**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 105. Matrice bloc

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

- 1) Comparer les valeurs propres de A et M .
- 2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
- 3) A quelle condition sur A , M est-elle diagonalisable ?

Exercice 106. Ensi P 90

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 107. Matrice bloc

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est (chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A).

Exercice 108. Matrice triangulaire par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A, C carrées. On suppose que A et C sont diagonalisables sans valeurs propres communes. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 109. Matrice bloc

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p .

Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m . Montrer que si $p > n - m$, alors λ est valeur propre de A .

Exercice 110. Réduction par blocs, Centrale MP 2003

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{sp}(B)$ et fonction de $\text{sp}(A)$.

Exercice 111. $A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, Mines MP 2003

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Représenter dans un plan l'ensemble des couples (a, b) tels que $A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Image et noyau

Exercice 112. Chimie P 1996

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E .

Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \text{Ker } f + \text{Im } f = E$?

Exercice 113. u est diagonalisable $\Leftrightarrow \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) + \text{Im}(u - \lambda \text{id})$ est directe

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Pour $\lambda \in \text{sp}(u)$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ et $F_\lambda = \text{Im}(u - \lambda \text{id})$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{sp}(u)$, $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$.

Exercice 114. $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

Exercice 115. $\text{rg}(f - \lambda \text{id})$

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\text{rg}(f - \lambda \text{id}) = \text{rg}(f - \lambda \text{id})^2$.

Exercice 116. Nombre de noyaux et d'images

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathcal{K} = \{\text{Ker}(P(u)), P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\text{Im}(P(u)), P \in \mathbb{K}[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Exercice 117. $\dim(\text{Ker } f^2) = 2 \dim(\text{Ker } f)$, Mines-Ponts MP 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\text{Ker } f^2) = 2 \dim(\text{Ker } f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d .

Sous-espaces stables

Exercice 118. Droites et hyperplans stables

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u .
- 2) Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\text{Im}(u - \lambda \text{id})$ où λ est une valeur propre de u).
- 3) Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un \mathbb{R} -ev.

Exercice 119. Plan stable pour une valeur propre non réelle

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M .

- 1) Montrer que \overline{X} est aussi vecteur propre de M .
- 2) Montrer que (X, \overline{X}) est libre dans \mathbb{C}^n .
- 3) Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans \mathbb{R}^n .
- 4) Soit $F = \text{vect}(U, V)$. Montrer que F est stable par φ (endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à M) et donner la matrice de $\varphi|_F$ dans la base (U, V) .

Exercice 120. Plans stables

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non constant, diviseur de μ_f , tel que $F \subset \text{Ker } P(f)$.
- 2) Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un diviseur de μ_f de degré 2. Montrer que $\text{Ker } P(f)$ contient un plan stable par f .
- 3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

Exercice 121. Recherche de sev stables

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer les sev de \mathbb{R}^3 stables pour l'endomorphisme associé à A .
- 2) Quelles sont les matrices réelles commutant avec A ?

Exercice 122. Plan affine stable

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H : x + 2y + 3z = 1$ un plan affine de E . Montrer que si H est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f .

Exercice 123. χ_u irréductible

Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension n sur le corps \mathbb{K} . Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur \mathbb{K} .

Exercice 124. Endomorphisme semi-simple.

Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f . Montrer qu'un endomorphisme d'un \mathbb{C} -ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

Exercice 125. Endomorphisme semi-simple, Polytechnique MP* 2000

Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f . Que peut-on dire de f ? Réciproque ?

Exercice 126. Sous-espaces stables, Centrale MP 2003

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par f .

Trigonalisation

Exercice 127. $AB = 0$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

Exercice 128. Produit de matrices nilpotentes

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = 0$.

Exercice 129. Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\text{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 130. Mines MP 2003

Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers un endomorphisme u . u est-il diagonalisable ?

Exercice 131. Mines-Ponts MP 2005

On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n non inversible. Soient α, β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M . Montrer que $\dim(\text{Ker } M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

Exercice 132. ENS 2014

Soit \mathbb{K} un corps fini. Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles toutes diagonalisables ? Sinon, trigonalisables ?

Divers

Exercice 133. $\|g - \text{id}\| < 1$, Ulm MP 2012

Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $g \in G$: $\|g - \text{id}\| < 1$. Montrer que G est réduit à $\{\text{id}\}$.

Exercice 134. Matrices nilpotentes, Mines MP 2012

Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 135. *Ens Lyon MP 2012*

Soient $S, R \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $S^2 = R^3 = I_n$ et $RS = SR^{-1}$. Montrer que S et R sont simultanément diagonalisables par blocs, avec des blocs de taille 1 ou 2.

Exercice 136. *Rangs itérés, ULC 2010*

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension d et $f \in \mathcal{L}(V)$.

- 1) Montrer que la suite $(\text{rg}(f^n))$ converge. On note $r(f)$ sa limite.
- 2) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors $r(f + g) \leq r(f) + r(g)$. Trouver un contre-exemple si $g \circ f \neq f \circ g$.
- 3) Exprimer $r(f)$ à partir du polynôme caractéristique de f .

solutions

Exercice 1.

- 1) 0 et les racines de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.
- 2) $\sin \alpha + \sin 2\alpha, -\sin \alpha, -\sin 2\alpha$.

Exercice 2.

- 1) $\text{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ est valeur propre d'ordre au moins $n - 2$. $E_0 = \{a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
vp $\lambda \neq 0 : \lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2) = 0$. Il y a deux racines distinctes, $E_\lambda = \text{vect}((a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda))$.
- 2) A est diagonale. vp = 0 et a_n .

Exercice 3.

- 1) $D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$.
- 2) $-2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), 1 \leq k \leq n$.

Exercice 4.

Soit $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de A et $Q_n(x)$ celui de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le premier 1 par 2. On a les relations de récurrence :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \quad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

D'où pour $x \notin \{0, 4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \quad \text{avec } x = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Les valeurs propres de A autres que 0 et 4 sont les réels $x_k = 2(1 - \cos(k\pi/n))$ avec $0 < k < n$ et 0 est aussi valeur propre (somme des colonnes nulle) donc il n'y en a pas d'autres.

Exercise 5.

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(6, -1).$

2) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(-2, 7).$

3) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(-3, 2).$

4) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(6, 2).$

5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, 2, -2).$

6) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(-1, -3, 6).$

7) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(1+i, 1-i, 2).$

8) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, 3, 3).$

9) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, 0, 2).$

10) $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, -1, 2).$

11) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, 2, 2).$

12) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(1, -1, 3, -3).$

13) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(2, 2, 2, -2).$

14) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(2, 2, -2, -2).$

15) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 21 & 99 \\ 0 & 1 & -11 & 11 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(-5, 2, -4, -16).$

16) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(2, 1, 3, -1).$

Exercise 6.

1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -7 \\ & 0 & 0 & 20 \\ & & 0 & -4 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 22.

- 1) $(-1)^n(X^n - a_n X^{n-1} - \dots - a_1)$.
- 2) Étude de $x \mapsto (x^n - a_n x^{n-1} - \dots - a_1)/x^n$.
- 3) Inégalité triangulaire.
- 4) Expression générale de A^k .

Exercice 24.

$$\text{spec}(T) =]-1, 1].$$

Exercice 25.

$$2) 0 < \lambda \leq 1 : f(x) = Cx^{1/\lambda-1}.$$

Exercice 26.

$$1/k, k \geq 1.$$

Exercice 27.

$$\lambda = \frac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2} : u(x) = C \sin(\pi/2 + k\pi)x.$$

Exercice 29.

$$3) P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \text{diag}(0, 2, -2).$$

Exercice 30.

- 1) 1 si $C \neq 0$, 0 si $C = 0$.
- 2) $\dim(E_0) \geq n - 1 \Rightarrow X^{n-1}$ divise $\chi_M \Rightarrow \chi_M = (-1)^n(X^n - (a_1^2 + \dots + a_n^2)X^{n-1})$.
- 3) Oui.

Exercice 31.

$\text{rg } A = 1$ donc $\dim \text{Ker } A = n - 1$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$. La somme des valeurs propres est $\text{tr } A = n$ donc la dernière valeur propre est n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc A est diagonalisable.

Exercice 32.

- 1) La fonction $f_n : x \mapsto P_n(x)/x^n$ croît strictement de $-\infty$ à 1 quand x varie de 0 à $+\infty$.
- 2) $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n - \sum_{k=1}^n kx^{n-k})$.

Exercice 33.

Soit $M = (x_i y_j) : M$ est de rang inférieur ou égal à 1, donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $n - 1$. Comme $\text{tr}(M) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(x) = (-x)^{n-1}(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x),$$

et le déterminant demandé est $\Delta_n = \chi_M(-1) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + 1$.

Exercice 34.

- 1) $\det(M + (t))$ est une fonction affine de t .
- 2) $|\lambda + a| = k|\lambda + b|$ et $\lambda = x + iy \Rightarrow (1 - k^2)(x^2 + y^2) + \dots = 0$, équation d'un cercle si $|a| \neq |b|$.

Exercice 35.

- 1) $a_1 \dots a_n + b_1 a_2 \dots a_n + a_1 b_2 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 \dots a_{n-1} b_n$.
- 3) $\frac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^n (a_i - t)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i - t}$ change de signe entre deux a_i successifs et dans l'un des intervalles $] -\infty, a_1[$ ou $]a_n, +\infty[$ donc χ_A admet n racines distinctes.
- 4) Oui. Supposons par exemple $a_1 = \dots = a_p < a_{p+1} < \dots < a_n$: La question précédente met en évidence $n - p$ racines simples de χ_A entre les a_i et $\pm\infty$, et a_1 est aussi racine d'ordre $p - 1$ de χ_A . Or les p premières lignes de $A - a_1 I$ sont égales donc $\text{rg}(A - a_1 I) \leq n - p + 1$ et $\dim(\text{Ker}(A - a_1 I)) \geq p - 1$ d'où la diagonalisabilité. Le cas où il y a plusieurs groupes de a_i égaux se traite de même.

Exercice 36.

$$\chi_B(X) = \frac{(-X)^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{X}\right), \chi_C(X^2) = \chi_A(X) \chi_A(-X).$$

Exercice 39.

a \Leftrightarrow **b** : thm du rang.

c \Leftrightarrow **d** : immédiat.

c \Rightarrow **b** : si $AX = XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X = XP(B)$.

$\bar{\mathbf{c}} \Rightarrow \bar{\mathbf{b}}$: prendre U vecteur propre de A , V vecteur propre de tB associés à la même valeur propre et $X = U^tV$.

Exercice 41.

On suppose que *inversible* signifie *inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$* , c'est-à-dire que le déterminant vaut ± 1 .

$\det(A + kB)$ est un polynôme en k de degré inférieur ou égal à 2 prenant la même valeur, 1 ou -1 en trois points distincts ; il est constant.

Exercice 42.

Somme des valeurs propres = n .

Exercice 43.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il faut en fait prouver que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(A^p) = \text{tr}(A)$. Remarque qu'on n'a pas forcément $A^p = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est faux, entre autres, si A est nilpotente non nulle. Soit X une indéterminée sur \mathbb{K} . On a dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$: $(A - XI_n)^p = A^p - X^p I_n$, d'où, en prenant les déterminants : $\chi_{A^p}(X^p) = \chi_A(X)^p = \chi_A(X^p)$ et on égale les coefficients de $X^{(n-1)p}$.

Exercice 44.

1) μ divise χ par Cayley-Hamilton et a les mêmes racines, les valeurs propres de M .

2) **a)** Pour $P(X) = X^p$ c'est la factorisation bien connue de $a^p - b^p$; pour P quelconque additionner les factorisations pour chaque monôme.

b) Prendre $P = \mu$ et calculer les déterminants.

Exercice 45.

1) Trigonaliser.

2) **(a)** \Rightarrow **(b)** : B a même polynôme caractéristique que la matrice nulle, $(-X)^n$, donc $(-B)^n = 0$. De plus, pour M quelconque, $\text{tr}((AM + B)^2) = \text{tr}((AM)^2)$, d'où $0 = \text{tr}(AMB + BAM) = 2\text{tr}(BAM)$. Ceci entraîne classiquement $BA = 0$.

(b) \Rightarrow **(a)** : pour $\lambda \neq 0$, la matrice $B - \lambda I$ est inversible et on a pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \det(AM + B - \lambda I) &= \det(B - \lambda I) \det((B - \lambda I)^{-1} AM + I) \\ &= (-\lambda)^n \det((B - \lambda I)^{-1} AM + I) \\ &= \det(-\lambda(B - \lambda I)^{-1} AM - \lambda I). \end{aligned}$$

De plus, $(B - \lambda I)A = -\lambda A$, donc $A = -\lambda(B - \lambda I)^{-1}A$ et il vient $\det(AM + B - \lambda I) = \det(AM - \lambda I)$ pour tout $\lambda \neq 0$, donc aussi pour $\lambda = 0$ par caractère polynomial en λ des deux membres.

Exercice 46.

$a = b$ ou a, b non nuls.

Exercice 49.

2) $(A - xI)({}^tA - xI) = (x^2 - 2x + 4)I$, $\chi_A(x) = x^2 - 2x + 4$.

3) ${}^tA = 2I - A$ donc $(A - xI)((2 - x)I - A) = (x^2 - 2x + 4)I$. En prenant pour x une des racines du polynôme $x^2 - 2x + 4$, on obtient un polynôme scindé à racines simples annihilant A .

Exercice 51.

A est diagonalisable car $A^2 = I$. $e^A = (\text{ch } 1)I + (\text{sh } 1)A$.

Exercice 52.

Si $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est l'unique valeur propre de u et $u \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable.
 Si $\text{Im } u \not\subset \text{Ker } u$ alors $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$ et donc $\text{Im } u + \text{Ker } u = E$. Or $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.

Exercice 54.

- 1) polynôme annulateur simple.
- 2) Non, $\text{ctrex} = B$ nilpotent.

Exercice 55.

$X^4 = 0$ donc X est nilpotente et son indice est strictement supérieur à 2 ; il n'y a pas de solution.

Exercice 56.

$\text{sp}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Exercice 57.

A est \mathbb{C} -diagonalisable et les valeurs propres sont $\alpha > 0$ et $\beta, \bar{\beta}$ avec la même multiplicité.

Exercice 59.

A est diagonalisable et a n valeurs propres distinctes, sinon il existerait un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Ces racines sont les n racines n -èmes de 1 et leur somme est nulle.

Exercice 60.

A est \mathbb{C} -diagonalisable (polynôme annulateur à racines simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Les dimensions sont conservées sur \mathbb{R} .

Exercice 62.

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geq 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commune sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.

Exercice 63.

Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ , de f . Alors $p_\lambda = P(f)$.

Exercice 64.

- 3) $\text{sp}(u_k) \subset \{i, -i\}$ d'après la relation $u_k^2 = -\text{id}_E$. Si le spectre était réduit à un élément alors u_k serait scalaire car diagonalisable, mais ceci est incompatible avec la relation d'anticommution entre u_k et u_ℓ . Donc $\text{sp}(u_k) = \{i, -i\}$.
- 4) u_ℓ avec $\ell \neq k$ échange les sous-espaces propres de u_k donc ils ont même dimension $n/2$.

Exercice 67.

- 1) Calcul Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.
- 2) c) $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.
 d) Si $P(u) = 0$ alors $u \circ P'(u) = 0$ donc P (polynôme minimal) divise XP' ce qui implique $P(X) = X^k$ pour un certain k .

Exercice 69.

Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \text{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geq 1$ et il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que toutes les racines de P sont congrues à u/n modulo 1. Cette condition est clairement suffisante.

Exercice 70.

On écrit $C = PJQ$ où P, Q sont inversibles et J est la matrice canonique de rang r . Alors $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$ donc $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs avec le même bloc diagonal $r \times r$, ce qui prouve que χ_A et χ_B ont un facteur de degré r en commun.

Exercice 71.

Le polynôme s'écrit $(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. Il n'a donc pas de racine réelle. Or tout élément de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre et cette valeur propre devrait être également racine du polynôme minimal. Par conséquent la réponse est non.

Exercice 72.

- 1) Que c'est un isomorphisme (et réciproquement).
- 2) Soit $Q(X) = P(X)/X$. On a $u \circ Q(u) = 0$ et X, Q sont premiers entre eux, d'où $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } Q(u)$ et $\text{Im } u \subset \text{Ker } Q(u)$. On conclut avec le théorème du rang.
- 3) Même méthode.

Exercice 73.

- 1) Toute valeur propre de f doit être racine de P , d'où $\text{sp}(f) = \emptyset$. En dimension impaire, χ_f est de degré impair donc admet au moins une racine réelle ; c'est absurde.
- 2) Immédiat.
- 3) La matrice de la restriction de f à H_x dans la base (y, x) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$. Supposons avoir trouvé un sev F stable par f et une base de F dans laquelle la matrice de la restriction de f est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à A . Si $F = E$ le problème est résolu. Sinon, on choisit $x \in E \setminus F$ et on considère le plan H_x . Il est en somme directe avec F car $F \cap H_x$ est un sev non trivial de H_x stable par f donc de dimension impaire. Le sev $F \oplus H_x$ vérifie la même propriété que F (stable par f et la restriction est diagonalisable par blocs avec des blocs diagonaux égaux à A). On peut donc continuer jusqu'à atteindre E .

Exercice 74.

Toute valeur propre de A est racine de P .

Exercice 75.

On écrit $A = I_n + mB$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Les valeurs propres de B sont de la forme $\frac{e^{2ik\pi/p} - 1}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$; elles ont un module inférieur ou égal à $2/m < 1$. Le produit des valeurs propres non nulles, s'il y en a, est au signe près le coefficient de plus bas degré de χ_B donc un entier. On en déduit que $\text{sp}(B) \subset \{0\}$ et B est \mathbb{C} -diagonalisable, comme A , d'où $B = 0$ et $A = I_n$.

Exercice 77.

- 2) a) Pour $p \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.
- b) $(\lambda \in \text{sp}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists v \neq 0 \text{ tq } v \circ (u - \lambda \text{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \text{id}_E \text{ n'est pas surjectif}) \Leftrightarrow (\lambda \in \text{sp}(u))$.
Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \text{sp}(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ on a :

$$(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker } v)$$

donc $\text{Ker}(\Phi_u - \lambda \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(H, E)$ où H est un supplémentaire de $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E)$.
On en déduit : $\dim(\text{Ker}(\Phi_u - \lambda \text{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E))$.

Exercice 78.

- $\lambda = 1$: $\text{Dir}(p) \subset \text{Ker } f$, $\text{Im } f \subset \text{Base}(p)$.
 $\lambda = 0$: $f(\text{Base}(p)) \subset \text{Dir}(p)$.

Exercice 80.

- 1) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Exercice 81.

- 3) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 82.

Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Alors il existe $\ell \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :

$$\forall x \in E, f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall x \in E, f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x)f^{k-1}(a) + \ell(f(x))f^{k-2}(a) + \dots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f -monogène engendré par a est égal à E , soit : $(a, \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$.

Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \dots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall x \in E, 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x)f^{n-1}(a) + \dots + \ell(f^{n-1}(x))a - \dots - \alpha_1 x a.$$

Ceci implique $\ell(x) = 0$ pour tout x , en contradiction avec l'hypothèse $\text{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Exercice 83.

1) Oui, les applications $u \mapsto p \circ u$ et $u \mapsto u \circ p$ le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.

2) Soit \mathcal{B} une base de E obtenue par concaténation d'une base de $\text{Ker } p$ et d'une base de $\text{Im } p$.

Si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{pmatrix}$, d'où $\text{sp}(\varphi) \subset \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ et $d_{1/2} = 2r(n-r)$.

Exercice 84.

Si D est diagonalisable alors les applications $X \mapsto DX$ et $X \mapsto XD$ le sont (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simultanément diagonalisables et leur différence, φ_D , est aussi diagonalisable.

Pour la réciproque, on commence par constater que si P est un polynôme quelconque, alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P(\varphi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(formule du binôme pour $P = X^m$ et linéarité de chaque membre par rapport à P pour P quelconque).
Supposons φ_D diagonalisable, prenons P annulateur scindé à racines simples de φ_D , $X = U^t V$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k U^t V \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V P(D - \lambda I).$$

Comme $U \neq 0$, ceci implique ${}^t V P(D - \lambda I) = 0$ pour tout V , donc $P(D - \lambda I) = 0$. Ainsi $D - \lambda I$ est diagonalisable et D itou.

Exercice 86.

1) 1 est valeur propre double, $d_1 = 1$.

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $X = \begin{pmatrix} (6\alpha t + \gamma)e^t + 2\beta \\ (6\alpha t + \gamma + 3\alpha)e^t + \beta \\ (6\alpha t + \gamma - \alpha)e^t + 2\beta \end{pmatrix}$.

Exercice 88.

- 1) $A \sim \text{diag}(1, \alpha, \alpha^{-1})$ où α est une racine primitive 7^{ème} de 1,
 $A \sim \text{diag}(\alpha, \alpha^{10}, \alpha^{-11})$ où α est une racine primitive 37^{ème} de 1.
- 2) pas de solution.
- 3) $\text{vp} = 0$ ou 1.

Exercice 90.

On se ramène à $\lambda = 0$ en remplaçant f par $f - \lambda \text{id}$. $\text{Im } f$ est de dimension 1 stable par f donc $f|_{\text{Im } f}$ est une homothétie, c'est l'application nulle vu $\text{sp}(f)$. On en déduit $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. Soit $e_2 \in \text{Im } f \setminus \{0\}$, e_3 un antécédant de e_2 par f et $e_1 \in \text{Ker } f$ indépendant de e_2 . Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Exercice 91.

Soit f un endomorphisme d'un ev E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$. Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.

$n \leq 1$: on a $f = 0$ donc $g = \text{id}_E$ convient.

$0, \dots, n-1 \Rightarrow n$: f est non surjectif donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $f|_{\text{Im}(f)}$.

Soit $g_1 \in GL(\text{Im}(f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \text{Im}(f)$. Soit $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ avec $H = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, $H \oplus I = \text{Im}(f)$ et $H \oplus K = \text{Ker}(f)$. La restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur $\text{Im}(f)$, on note φ l'isomorphisme réciproque. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$g(h + i + k + \ell) = g_1(h + i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

On vérifie facilement que $f \circ g = 2g \circ f$ et il reste à prouver que g est injective. Si $x = h + i + k + \ell \in \text{Ker } g$ alors $g(f(x)) = g_1(f(i + \ell)) = 0$ donc $i + \ell \in \text{Ker } f = H \oplus K$ soit $i = \ell = 0$. Il reste $g_1(h) + k = 0$ ce qui implique $h = k = 0$ car $g_1(h) \in \text{Im } f = H \oplus I$.

Remarque : la démonstration passe à tout corps de caractéristique différente de 2.

Exercice 92.

- 1) $A^{2k} = I$, $A^{2k+1} = A$.

Exercice 93.

- 3) $\alpha_n = -\frac{1}{3} + \frac{2^n}{4} + \frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4}$, $\gamma_n = \frac{4}{3} - \frac{2^n}{2} + \frac{(-2)^n}{6}$.

Exercice 94.

- 2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(1, 2, 3)$.

$$2u_n = (6 - 6 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n)u_0 + (-5 + 8 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n)u_1 + (1 - 2 \cdot 2^n + 3^n)u_2.$$

Exercice 95.

- 1) Le polynôme minimal de f est de degré supérieur ou égal à n et n'a pas de diviseurs non triviaux. Donc $\dim E = 1$ et f est une homothétie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut aussi avoir $\dim E = 2$ et f n'a pas de valeurs propres réelles.

Exercice 96.

- 1) Diagonaliser ${}^t M \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cste}$.
- 2) $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$ donc si $y_0 \neq x_0$ alors $M_n \rightarrow \infty$ sinon la suite est constante.
- 3) $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Exercice 98.

- 2) $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou l'inverse.

Exercice 99.

$$M = \pm \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1/5 & \pm 2 & 0 \\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \pm \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 & 0 \\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 100.

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(0, 1, 1)$. On prend $B = PMP^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 101.

- 1) $\text{sp}(M) = \{1, \sqrt{6} - 1, \sqrt{6} + 1\}$, M est diagonalisable et son commutant est l'ensemble des polynômes en $M : aI + bM + cM^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 2) M est cyclique.

Exercice 102.

- 1) Par similitude on se ramène aux cas : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ou $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$ ou $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$.
- 2) Si A est diagonalisable de valeurs propres λ_i avec les multiplicités n_i alors $\dim(\mathcal{C}(A)) = \sum n_i^2 \geq n$. Dans le cas général, soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A et (C_k^1, \dots, C_k^n) une suite de n -uplets de matrices commutant avec A_k telles que (C_k^1, \dots, C_k^n) est une famille orthonormale pour un produit scalaire quelconque choisi sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par compacité il existe une sous-suite convergente, donc n matrices C_∞^i formant une famille orthonormale et commutant avec A d'où $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$.

Exercice 103.

Soit $d_n(i, j)$ le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j . j admet trois voisins k_1, k_2, k_3 et l'on a : $d_n(i, j) = d_{n-1}(i, k_1) + d_{n-1}(i, k_2) + d_{n-1}(i, k_3)$. On numérote les sommets de 0 à 7 de sorte que les voisins du sommet i sont les sommets $i + 1 \pmod 8$, $i + 2 \pmod 8$ et $i + 4 \pmod 8$. Le vecteur $d_n = (d_n(0, 0), \dots, d_n(0, 7))$ vérifie la relation de récurrence $d_n = Ad_{n-1}$ où A est la matrice suivante (. désigne 0) :

$$A = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B + I_4 & 0 \\ 0 & B - I_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B \pm I_4 = \begin{pmatrix} C \pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C \pm I_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C \pm I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & C \pm I_2 - I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et enfin,

$$C \pm I_2 \pm I_2 = \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1 \pm I_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 + I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1 \pm I_1 - I_1 \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres $-3, -1, 1, 3$ et on peut certainement terminer les calculs pour obtenir $d_n = A^n d_0$.

Exercice 105.

- 2) Par récurrence pour $P = X^k$, puis par linéarité.
- 3) Si M est diagonalisable, on prend $P = \mu_M$: donc μ_A divise P et XP' et P est scindé à racines simples. La seule racine simple possible est 0, d'où $A = 0$.

Exercice 106.

S'inspirer du cas $n = 1$. Soit $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donc A aussi.

Exercice 107.

$$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tq } AY = \lambda^2 Y \right\}.$$

Exercice 110.

Calcul du polynôme caractéristique de B par opérations en blocs. On obtient

$$\chi_B(x) = \det(x^2 I - 2xA - A^2) = (-1)^n \chi_A\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right) \chi_A\left(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\right)$$

donc

$$\text{sp}(B) = \{(1 + \sqrt{2})\lambda, \lambda \in \text{sp}(A)\} \cup \{(1 - \sqrt{2})\lambda, \lambda \in \text{sp}(A)\}.$$

Exercice 111.

En prenant $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a^2 - ab & ab - b^2 & 0 & 0 \\ ab - b^2 & a^2 - ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + ab & b^2 + ab \\ 0 & 0 & b^2 + ab & a^2 + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}.$

En prenant $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1}M_2P_1 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $\text{sp}(A) = \{(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)\}$, donc l'ensemble cherché est la boule unité ouverte pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 114.

Si $P(0) \neq 0$ alors f est bijective. Si $P(0) = 0$ alors $f^2 \circ \text{qqch} = -P'(0)f \Rightarrow \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.

Exercice 116.

Soit μ le polynôme minimal de u et \mathcal{D} l'ensemble des diviseurs unitaires de μ . Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $d = P \wedge \mu$ on a facilement $\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(d(u))$ et $\text{Im}(P(u)) = \text{Im}(d(u))$. Ceci montre déjà que \mathcal{K} et \mathcal{I} sont finis.

De plus, si $d \in \mathcal{D}$ alors l'annulateur minimal de $u|_{\text{Im}(d(u))}$ est μ/d donc l'application $d \mapsto \text{Im}(d(u))$ est injective sur \mathcal{D} et $\text{card}(\mathcal{I}) = \text{card}(\mathcal{D})$. De même, l'annulateur minimal de $u|_{\text{Ker}(d(u))}$ est d car $\text{Ker}(d(u)) \supset \text{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ et d est l'annulateur minimal de $u|_{\text{Im}(\mu/d(u))}$ donc l'application $d \mapsto \text{Ker}(d(u))$ est injective sur \mathcal{D} et $\text{card}(\mathcal{K}) = \text{card}(\mathcal{D})$.

Exercice 117.

En appliquant le théorème du rang à $f|_{\text{Ker } f^2}$, on a : $\dim(\text{Ker } f^2) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(f(\text{Ker } f^2))$, et $f(\text{Ker } f^2) \subset \text{Ker } f$, donc $f(\text{Ker } f^2) = \text{Ker } f$. Soit $G_i = \text{Ker } g^i$. Montrons que $g(G_{i+1}) = G_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$: si $x \in G_{i+1}$ alors $g^i(g(x)) = g^{i+1}(x) = 0$ donc $g(x) \in G_i$. Réciproquement, si $y \in G_i$ alors $y \in G_k = f(G_{2k})$, donc y a un antécédant x par f , cet antécédant appartient à G_{i+k} , et $y = g(g^{k-1}(x)) \in g(G_{i+1})$.

On en déduit, avec le théorème du rang appliqué à $g|_{G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\text{Ker } g)$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, d'où $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k \dim(\text{Ker } g) = k \dim(\text{Ker } g)$.

Exercice 121.

1) Valeurs propres : $1, j, j^2$. sev stables : $\{0\}, \langle e_3 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle$ et \mathbb{R}^3 .

2) $AB = BA \Rightarrow \varphi_B(e_3) = \lambda e_3, {}^t A {}^t B = {}^t B {}^t A \Rightarrow \varphi_{{}^t B}(e_3) = \lambda e_3$, d'où $B = \begin{pmatrix} a + \mu & a & 0 \\ -3a & -2a + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

Exercice 122.

Soit $\varphi(x, y, z) = x + 2y + 3z$. f conserve la surface de niveau $\varphi = 1$ donc par linéarité $\varphi \circ f = \varphi$ et φ est vecteur propre de ${}^t f$.

Exercice 123.

Si χ_u est irréductible, pour $x \neq 0$ le polynôme minimal de x en u est égal à χ_u donc le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E et il n'y a pas de sous-espace stable non trivial.

Si seuls $\{0\}$ et E sont stables, soit $x \neq 0$. Le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E donc l'annulateur minimal de u en x est égal à χ_u . Soit P un diviseur non trivial de χ_u et $y = P(u)(x)$: l'annulateur minimal de u en y est χ_u/P , absurde.

Exercice 125.

Si E est de dimension finie, soit F un hyperplan de E , $\langle e \rangle$ un supplémentaire stable et H un supplémentaire de $\langle e \rangle$ stable. Si K est un sev de H , alors K admet un supplémentaire K' dans E stable et $H \cap K'$ est un sev de H stable, en somme directe avec K . $K' \not\subset H$ car $K \subset H$ et $K \oplus K' = E$ donc $K' + H = E$ et $\dim(H \cap K') = \dim(H) + \dim(K') - \dim(E) = \dim(H) - \dim(K)$ soit $K \oplus (H \cap K') = H$. $f|_H$ vérifie la même propriété que f et on obtient par récurrence que f est diagonalisable.

Réciproquement, soit f diagonalisable, F un sev de E et (e_1, \dots, e_n) une base propre pour f . On montre que F admet un supplémentaire stable par récurrence sur $\text{codim}(F)$: si $F = E$ alors $\{0\}$ convient et si $F \neq E$ alors il existe i tel que $e_i \notin F$ d'où $F \oplus \langle e_i \rangle$ est un sur-espace strict de F , admettant un supplémentaire G stable, d'où $G \oplus \langle e_i \rangle$ est supplémentaire de F stable.

Cas E de dimension infinie : ???

Exercice 126.

$\text{sp}(f) = \{0, 1, 2\}$ donc f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Comme la restriction d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, les sous-espaces stables par f sont les huit sous-sommes de $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

Exercice 129.

0 est valeur propre, se placer dans un hyperplan stable et récuser.

Exercice 130.

Non. Prendre $\text{Mat}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$.

Exercice 131.

Trigonaliser fortement M .

Exercice 132.

Non, il existe une matrice ayant pour polynôme caractéristique $1 + \prod_{a \in \mathbb{K}} (X - a)$, non scindé.

Exercice 133.

Soit $g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de g où g est considérée comme une matrice complexe. La suite $(g^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à valeurs dans G , donc est bornée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il en résulte que la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée dans \mathbb{C} , soit : $|\lambda| = 1$. De même, $(g - \text{id})^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $(\lambda - 1)^k \rightarrow 0$, soit : $|\lambda - 1| < 1$ et plus généralement $|\lambda^p - 1| < 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ceci implique $\lambda = 1$. Ainsi 1 est l'unique valeur propre de g . On écrit alors $g = \text{id} + h$ avec h nilpotente, d'où $g^k = \text{id} + kh + \binom{k}{2} h^2 + \dots + \binom{k}{n-1} h^{n-1}$ est un polynôme en k à valeurs bornées quand k décrit \mathbb{N} . Ceci implique $h = 0$ et finalement $g = \text{id}$.

Exercice 134.

Soit V ce sous-espace. V contient toutes les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $i \neq j$, donc toutes les matrices à diagonale nulle. Par ailleurs V est inclus dans l'hyperplan constitué des matrices à trace nulle. Reste donc à étudier le cas des matrices diagonales à trace nulle. Ces matrices sont engendrées par les matrices $E_{11} - E_{jj}$ pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ces trois matrices sont nilpotentes, donc toute matrice $E_{11} - E_{jj}$ est combinaison linéaire de nilpotentes et V est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 135.

La propriété est immédiate si $n = 1$ ou $n = 2$. On procède alors par récurrence en supposant la propriété vraie pour tout $k < n$. Soient S et R vérifiant les hypothèses pour n :

on a $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(R - I_n) \oplus \text{Ker}(R^2 + R + I_n)$ et ces deux sous-espaces sont stables par R et S . En effet, la stabilité par R est évidente et si $RX = X$ alors $RSX = SR^{-1}X = SX$. De même, si $(R^2 + R + I_{n+1})X = 0$, alors $(R^2 + R + I_n)SX = R^2SX + RSX + SX = SRX + SR^2X + SX = S(X + RX + R^2X) = 0$.

Si aucun de ces sous-espaces n'est égal à \mathbb{C}^n alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits par les restrictions de R et de S .

Si $\text{Ker}(R - I_n) = \mathbb{C}^n$ alors $R = I_n$ et R, S sont simultanément diagonalisables.

Si $\text{Ker}(R^2 + R + I_n) = \mathbb{C}^n$, alors $0 = R^2 + R + I_n = (R - jI_n)(R - j^2I_n)$. Soit X tel que $RX = jX$. Alors $RSX = SR^2X = S(-R - I_n)X = S(-j - 1)X = j^2SX$. On en déduit S induit un isomorphisme de $E_j(R)$ sur $E_{j^2}(R)$ (on savait que ces deux sous-espaces étaient de même dimension car R est semblable à R^{-1}). On prend donc (X_1, X_2, \dots, X_q) une base de $E_j(R)$. Alors $(X_1, SX_1, \dots, X_q, SX_q)$ est une base dans laquelle les matrices des endomorphismes représentés par R et S dans la base canonique sont diagonales par blocs, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ pour R et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour S .

Exercice 136.

- 1) La suite est décroissante minorée, donc elle converge.
- 2) On écrit $\chi_f = (-1)^n \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$. Les théorèmes de Cayley-Hamilton et de décomposition des noyaux donnent $V = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{id})^{m_k}$. La matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\lambda_k I + N_k$, avec N_k nilpotente. On voit alors que $r(f) = d - m_0$, m_0 multiplicité de la valeur propre 0 (éventuellement $m_0 = 0$). Si g commute avec f alors les sous-espaces $\text{Ker}(f - \lambda_k \text{id})^{m_k}$ sont stables par g . On considère w l'endomorphisme de $\text{Ker} f^{m_0}$ induit par g . On a $\text{Ker} f^{m_0} = \bigoplus_{k=1}^q \text{Ker}(w - \mu_k \text{id})^{n_k}$. Chacun de ces sous-espaces est stable par f , on fait une trigonalisation forte de la restriction de f . La matrice de $f + g$ dans la base ainsi construite sera diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\mu_k I + \tilde{N}_k$. On rajoute donc au plus $r(g)$ coefficients diagonaux non nuls. On en déduit que $r(f + g) \leq r(f) + r(g)$.
- 3) On a vu à la question précédente que $r(f) = d - m_0$.