Réduction des endomorphismes

Calculs

Exercice 1. *Calcul de valeurs propres*

Chercher les valeurs propres des matrices :

1) $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *Calcul de valeurs propres*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On distinguera les cas :

1) $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
2) $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

Exercice 3. *Polynômes de Chebychev*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ par récurrence.
2) En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 4. *Matrice tridiagonale*

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. *Diagonalisation*

Diagonaliser les matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **10)** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **11)** $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ **12)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **14)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **15)** $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **16)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. *Trigonalisation*

Trigonaliser les matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 7. *Diagonalisation*

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. *Diagonalisation*

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9. *Calcul*

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 10. *Calcul*

Soit $C_{pq} = \begin{pmatrix} U_{pq} & 0 & U_{pq} \\ 0 & 0 & 0 \\ U_{pq} & 0 & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où U_{pq} est la matrice $p \times q$ dont tous les coefficients valent 1. Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$.

Exercice 11. *Matrice triangulaire*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 12. *Sommes par lignes ou colonnes constantes*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la somme des coefficients par ligne est constante $(= S)$. Montrer que S est une valeur propre de A. Même question avec la somme des coefficients par colonne.

Exercice 13. *Matrices stochastiques*

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, i, j,\ m_{ij} \geqslant 0$ et $\forall\, i,\ m_{i,1} + m_{i,2} + \ldots + m_{i,n} = 1$ *(matrice stochastique)*.

1) Montrer que 1 est valeur propre de M.

2) Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ (si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module). Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

Exercice 14. $(X^2-1)P'' + (2X+1)P'$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + (2X+1)P'. \end{cases}$

1) Chercher la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 15. $(X-a)P'$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X-a)P'. \end{cases}$ Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 16. $X(X-1)P' - 2nXP$

Soit $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X(X-1)P' - 2nXP. \end{cases}$ Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 17. $X^3P \bmod (X-a)(X-b)(X-c)$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ distincts, et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ.

Exercice 18. $P(2-X)$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme θ : $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(2-X). \end{cases}$

Exercice 19. $P(X+1)-P'$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme θ : $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P'. \end{cases}$

Exercice 20. $(X-a)P'+P-P(a)$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ qui à P associe $(X-a)P'+P-P(a)$. Donner la matrice de f dans la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Chercher $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ et les éléments propres de f.

Exercice 21. $\operatorname{tr}(A)M+\operatorname{tr}(M)A$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $f(M) = \operatorname{tr}(A)M + \operatorname{tr}(M)A$ est-il diagonalisable ?

Exercice 22. *Étude d'une matrice*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & (0) \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ a_n & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ où les a_i sont des réels positifs ou nuls, avec $a_1a_n > 0$.

1) Quel est le polynôme caractérique de A ?
2) Montrer que A admet une unique valeur propre $r > 0$ et que l'on a $r < 1 + \max(a_1, \dots, a_n)$.
3) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant r$ et $|\lambda| = r \Rightarrow \lambda = r$.
4) Montrer qu'il existe un entier k tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs.

Espaces fonctionnels

Exercice 23. $f \mapsto f(2x)$

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues tq $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\}$, φ : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{cases}$ et u : $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f\circ\varphi. \end{cases}$
Montrer que u n'a pas de valeurs propres (si $u(f) = \lambda f$, étudier les limites de f en 0 ou $\pm\infty$).

Exercice 24. *Translation*

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = f(x+1)$. Trouver les valeurs propres de T.

Exercice 25. *Équation intégrale*

Soit $E = \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathbb{R})$ et u : $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{cases}$ avec $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $\tilde{f}$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
2) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 26. *Endomorphisme sur les suites*

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n^2}.$$

Quelles sont les valeurs propres de f ?

Exercice 27. *Opérateur intégral*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et f : $\begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \tilde{u} \end{cases}$ avec $\tilde{u}(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{1} \min(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$.
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Polynôme caractéristique

Exercice 28. *Formules pour une matrice* 3×3
Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1) Vérifier que $\chi_A(\lambda)=-\lambda^3+(\operatorname{tr}A)\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda+\det(A)$.
2) Soit λ une valeur propre de A et L_1,L_2 deux lignes non proportionnelles de $A-\lambda I$ (s'il en existe). On calcule $L=L_1\wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X={}^tL$. Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Exercice 29. *Recherche de vecteurs propres pour une valeur propre simple*
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de A telle que $\operatorname{rg}(A-\lambda I)=n-1$.
1) Quelle est la dimension du sous espace propre E_λ ?
2) Montrer que les colonnes de ${}^t\mathrm{com}(A-\lambda I)$ engendrent E_λ.
3) AN : Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 30. *Éléments propres de $C\,{}^tC$*
Soit $C=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M=C\,{}^tC$.
1) Chercher le rang de M.
2) En déduire le polynôme caractéristique de M.
3) M est-elle diagonalisable ?

Exercice 31. (i/j)
Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}=i/j$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 32. *Matrice compagne*
On considère pour $n\in\mathbb{N}^*$ le polynôme défini par : $P_n(x)=x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_ix^i$ avec $\alpha_0>0$ et $\alpha_i\geqslant 0$ pour $1\leqslant i\leqslant n-1$.
1) Montrer qu'il existe une unique racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ pour P_n.
2) Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\2&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&&\ddots&1\\n&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$. Montrer que A admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Exercice 33. $I+(x_iy_j)$
Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{C}$. Calculer $\Delta_n=\det(I+(x_iy_j))$.

Exercice 34. *Centrale MP 2000*
On considère la matrice de $M_n(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix}0&a&\cdots&a\\b&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\b&\cdots&b&0\end{pmatrix}$, $a\neq b$.
1) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\dfrac{1}{a-b}(a(X+b)^n-b(X+a)^n)$.
2) Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.

Exercice 35. *Centrale MP 2000*

Soit $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ et $A_n=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n\\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \cdots & b_n\\ \vdots & b_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n+b_n\end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A_n$.

2) Calculer χ_A, le polynôme caractéristique de A.

3) On suppose $a_1<a_2<\ldots<a_n$ et, pour tout i, $b_i>0$. Montrer que A_n est diagonalisable (on pourra utiliser $\chi_A(t)/\prod_{i=1}^n(a_i-t)$).

4) Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ et, pour tout i, $b_i>0$?

Exercice 36. *Polynômes caractéristiques*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B=A^{-1}$, $C=A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B et χ_C en fonction de χ_A.

Exercice 37. *Matrice compagne*

Soit $P=X^n-(a_0+a_1X+\ldots+a_{n-1}X^{n-1})\in\mathbb{K}_n[X]$.

La matrice compagne de P est $M=\begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0\\ 1 & \ddots & & a_1\\ & \ddots & 0 & \vdots\\ (0) & & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathcal{B}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de M.

2) Calculer $\varphi^k(e_1)$ pour $0\leqslant k\leqslant n$.

3) En déduire que $\mu_M=P$.

Exercice 38. $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\varnothing$

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{sp}(A)\cap\mathrm{sp}(B)=\varnothing$ si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.

Application : Soient A,B,P trois matrices carrées complexes avec $P\neq 0$ telles que $AP=PB$. Montrer que A et B ont une valeur popre commune.

Exercice 39. *Matrices à spectres disjoints*

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

a) $\forall\, C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX-XB=C$.

b) $\forall\, X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX=XB\Rightarrow X=0$.

c) $\chi_B(A)$ est inversible.

d) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 40. *AB et BA ont même polynôme caractéristique*

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

2) Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

3) Dans le cas général, on note $M=\begin{pmatrix} BA & -B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 0 & -B\\ 0 & AB\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} I_n & 0\\ A & I_n\end{pmatrix}$ $(M,N,P\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}))$.
Vérifier que $MP=PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

Exercice 41. *X 2014*

Soient $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A,A+B,A+2B,A+3B,A+4B$ sont inversibles. Montrer que $A+5B$ l'est.

Exercice 42. *Trace*

Soit l'application $\Phi:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & {}^tM.\end{cases}$ Calculer sa trace par un moyen simple.

Exercice 43. *Fermat pour la trace, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005*

Soit p premier et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^p)\equiv\mathrm{tr}(A)\pmod p$.

Exercice 44. *Facteurs irréductibles (Lacouture)*

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque, $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note μ le polynôme minimal de M et χ son polynôme caractéristique. Le but de l'exercice est de prouver que μ et χ ont mêmes facteurs irréductibles.

1) Traiter le cas où χ est scindé.

2) Cas général.

a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ tel que

$$P(M) - P(X)I_n = (M - XI_n)R(X).$$

b) Montrer que χ divise μ^n puis conclure.

Exercice 45. *$AM + B$ et AM ont même polynôme caractéristique, Centrale MP 2012*

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant même polynôme caractéristique. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(B^2)$.

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

(a) $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AM + B$ et AM ont même polynôme caractéristique ;

(b) B est nilpotente et $BA = 0$.

Polynôme annulateur

Exercice 46. *Matrice bitriangulaire*

Donner une CNS sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 47. *$A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$*

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 48. *$u^3 = u^2$*

Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E.

On suppose que $u^3 = u^2$, $u \neq \mathrm{id}$, $u^2 \neq 0$, $u^2 \neq u$.

1) Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.

2) Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u.

3) Montrer que u *n'est pas* diagonalisable.

4) Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.

5) Monter que $u|_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$ est l'identité.

Exercice 49. *INT gestion 94*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\det A$.

2) Calculer $(A - xI)({}^tA - xI)$ et en déduire $\chi_A(x)$.

3) Montrer que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Exercice 50. *$X^nP(1/X)$*

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et u : $\begin{cases} E & \longrightarrow \quad E \\ P & \longmapsto \quad X^nP(1/X). \end{cases}$

1) Déterminer $u \circ u$. En déduire que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ alors u est diagonalisable.

2) Étudier le cas $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 2$.

3) Lorsque u est diagonalisable, donner une base de vecteurs propres de u.

Exercice 51. *$A = A^{-1}$*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^{-1}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer e^A ($e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$).

Exercice 52. *Endomorphisme de rang 1*
Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Exercice 53. *u^2 diagonalisable*
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable. Donner un contre-exemple dans un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 54. *Racine p-ème*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $B^p = A$.
1) Montrer que B est diagonalisable.
2) Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?

Exercice 55. *X 2014*
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 56. *p^2 est un projecteur*
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ? Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 57. *$A^3 = A + I$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 58. *$A^3 + A^2 + A = 0$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, A$ est pair.

Exercice 59. *$A^n = I$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 60. *$A^p = I$ et $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont réelles et qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $A^p = I$. Montrer que $A^2 = I$.

Exercice 61. *$P(u) = \sum P(\lambda_i) u_i$*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) On suppose u diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.
  a) Montrer qu'il existe des endomorphismes $u_1, \dots, u_p$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on ait : $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$.
  b) Montrer qu'il existe un polynôme P_i tel que $u_i = P_i(u)$.
2) Réciproquement, soit $u, u_1, \dots, u_p \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i.$$

Montrer que u est diagonalisable et $\mathrm{sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Exercice 62. *Projecteurs*
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f_1, \dots, f_n$, n applications linéaires toutes non nulles. On suppose : $\forall\, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Montrer les f_i sont toutes de rang un.

Exercice 63. *Projecteurs spectraux*
Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un ev E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en f.

Exercice 64. *Endomorphismes anticomutant, Centrale MP 2003*
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ ($p \geqslant 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall\, k,\ u_k^2 = -\operatorname{id}_E, \qquad \forall\, k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1) Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.
2) Montrer que n est pair.
3) Donner le spectre de chaque u_k.
4) Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k.
5) Calculer $\det(u_k)$.

Exercice 65. $u^2 = 0$
Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$.
1) Quelle relation y a-t-il entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$? Montrer que $2 \operatorname{rg} u \leqslant \dim E$.
2) On suppose ici $\dim E = 4$ et $\operatorname{rg} u = 2$. Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que : $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = 0$, $u(e_3) = e_4$, $u(e_4) = 0$.
3) On suppose $\dim E = n$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Est-ce que u est diagonalisable ?

Exercice 66. *Réduction de M tq $M^3 = I$*
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I$, et $M^3 = I$.
1) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?
2) Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 67. *Centrale PSI 1998*
Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1) Cas particulier, $n = 3$, $\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si v et h existent et si oui, les donner.
2) Cas général.
a) Que peut-on dire de $\operatorname{tr}(u)$ et $\operatorname{tr}(v)$?
b) Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par h.
c) Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
d) Quel est le polynôme minimal de u ?

Exercice 68. *Indépendance du polynôme minimal par rapport au corps*
Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mu_{\mathbb{K}}(A)$ et $\mu_{\mathbb{L}}(A)$ les polynômes minimaux de A en tant que matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{L}$. Montrer que ces polynômes sont égaux.

Exercice 69. *Trace entière, X MP* 2004*
Caractériser les polynômes P tels que : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(P(A) = 0) \Rightarrow (\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Exercice 70. *Valeurs propres communes*
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$ et $\operatorname{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes.

Exercice 71. *Polynôme minimal imposé, Centrale MP 2005*
Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$?

Exercice 72. $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$, *Polytechnique MP* 2006*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p le plus petit exposant de X dans l'écriture de P.
1) Si $p = 0$, que dire de u ?
2) Si $p = 1$, montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
3) Dans le cas général, montrer que $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

Exercice 73. $f^2+\alpha f+\beta\,\mathrm{id}=0$, *Centrale 2015*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n\geqslant 1$. Soit $P=X^2+\alpha X+\beta\in\mathbb{R}[X]$ sans racine réelle et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $P(f)=0$. Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\begin{pmatrix}0&1\\-\beta&-\alpha\end{pmatrix}$.

1) Montrer que f n'admet aucune valeur propre puis que n est pair.

2) Soit $x\in E$ non nul et $y=f(x)+\alpha x$. On note $H_x=\langle x,y\rangle$. Montrer que H_x est un plan stable par f et que c'est le plus petit sev de E stable par f et contenant x.

3) Prouver la propriété annoncée.

Exercice 74. *$P(A)$ est nilpotente, Mines-Ponts 2015*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 75. $A^p=I_n$, *Mines 2015*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ vérifiant $A^p=I_n$. On suppose de plus qu'il existe $m\geqslant 3$ tel que, pour tous i,j, m divise $[A-I_n]_{i,j}$. Déterminer A.

Endomorphismes de composition

Exercice 76. *Équation $AM=\lambda M$*

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les scalaires λ et les matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM=\lambda M$.

Exercice 77. $v\mapsto v\circ u$, *Centrale MP 2003*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v\in\mathcal{L}(E)$ associe $v\circ u$.

1) Montrer que $\Phi_u\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

2) Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u est diagonalisable)...

a) en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u.

b) en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u.

Exercice 78. $f\mapsto p\circ f\circ p$

Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ une projection et $\Phi:\begin{cases}\mathcal{L}(E)&\longrightarrow&\mathcal{L}(E)\\ f&\longmapsto&p\circ f\circ p.\end{cases}$ Déterminer les éléments propres de Φ.

Exercice 79. $f\mapsto u\circ f$ *et* $f\mapsto f\circ u$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

On considère les applications : $\begin{cases}\mathcal{L}(E)&\longrightarrow&\mathcal{L}(E)\\ \varphi:f&\longmapsto&u\circ f\\ \psi:f&\longmapsto&f\circ u.\end{cases}$

1) Montrer que φ et ψ sont diagonalisables.

2) Montrer que $\varphi-\psi$ est diagonalisable.

Exercice 80. $u\circ v-v\circ u=\mathrm{id}$

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, E un $\mathbb{K}$-ev non nul et u,v deux endomorphisme de E tels que $u\circ v-v\circ u=\mathrm{id}_E$.

1) Simplifier $u^k\circ v-v\circ u^k$ pour $k\in\mathbb{N}$ puis $P(u)\circ v-v\circ P(u)$ pour $P\in\mathbb{K}[X]$.

2) Montrer que u et v n'ont pas de polynômes minimaux.

Exercice 81. $f\circ g-g\circ f=\alpha f$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(E)$, $\alpha\in\mathbb{K}^*$ tels que $f\circ g-g\circ f=\alpha f$.

1) Montrer pour tout entier naturel n : $f^n\circ g-g\circ f^n=n\alpha f^n$.

2) Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f^n=0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h\mapsto h\circ g-g\circ h$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$).

3) Donner un contre-exemple avec $\mathrm{car}(\mathbb{K})\neq 0$.

Exercice 82. *X MP* 2001*

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur $\mathbb{K}$) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f,g] = f\circ g - g\circ f$ n'est de rang un.

Exercice 83. $\frac{1}{2}(p\circ u + u\circ p)$, *Mines MP 2003*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n finie, p un projecteur de rang r et

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & \frac{1}{2}(p\circ u + u\circ p). \end{cases}$$

1) Est-ce que φ est diagonalisable ?
2) Déterminer les valeurs propres de φ et les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 84. *Crochet de Lie, Ens Cachan MP* 2003*

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'ev tel que : $\forall\, A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi([A,B]) = [\Phi(A),\Phi(B)]$ où $[X,Y] = XY - YX$. Montrer : $\forall\, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ($D$ est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\Phi(D)$ est diagonalisable).
Indication : considérer $\varphi_D : X \mapsto [D,X]$ et montrer que (D est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (φ_D est diagonalisable).

Similitude

Exercice 85. *Matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$*

Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$: Il existe $P,Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $P+iQ \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(P+iQ)A = B(P+iQ)$.
1) Montrer : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $(P+\lambda Q)A = B(P+\lambda Q)$.
2) En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 86. *Trigonalisation de matrices*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2) Chercher deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.
3) Compléter ces vecteurs en une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Écrire la matrice de φ dans cette base.
5) Résoudre le système différentiel : $X' = AX$.

Exercice 87. *Somme de projecteurs*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des projecteurs $p_1,\dots,p_k \in \mathcal{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tels que : $u = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_k p_k$ et $\forall\, i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 88. *A^3 est semblable à A^4*

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A^3 est semblable à A^4 ? On étudiera séparément les cas :
1) A a trois valeurs propres distinctes.
2) A a deux valeurs propres distinctes
3) A a une seule valeur propre.

Exercice 89. *Décomposition de Dunford*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices D,N telles que $A = D+N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$.

Exercice 90. *Réduction de Jordan, Mines MP 2003*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{sp}(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})) = 2$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 91. *A et $2A$ sont semblables*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que A et $2A$ sont semblables.

Usage de la réduction

Exercice 92. *Ensi PC 1999*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n.

2) Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (U_n) défini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer U_n en fonction de n.

3) Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$.

Exercice 93. *Puissances de A*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

2) On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

3) En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exercice 94. *Suites récurrentes linéaires*

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) Diagonaliser A. En déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Exercice 95. *Endomorphisme cyclique*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1) On suppose que pour tout sous-ev D de dimension 1 il existe $x \in D$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Que dire de E et f ?

2) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Montrer que si f est diagonalisable alors ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que si f est nilpotente alors $f^{n-1} \neq 0$.

Exercice 96. *Suite de points*

Soit (M_n) une suite de points dans le plan, de coordonnées (x_n, y_n) définies par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = -x_n + 2y_n, \qquad y_{n+1} = -3x_n + 4y_n.$$

1) Montrer que, quelque soit M_0, les points M_n sont alignés.

2) Étudier la suite (M_n) quand n tend vers l'infini.

3) Quelle est la limite de y_n/x_n (utiliser une méthode géométrique) ?

Exercice 97. *Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes*

1) Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.

a) Montrer qu'une matrice M commute avec D si et seulement si M est diagonale.

b) Montrer que pour toute matrice M diagonale, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en A.

Exercice 98. *$XY = YX = A$*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Trouver toutes les matrices $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $XY = YX = A$.

Exercice 99. *Racine carrée*

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 100. *Racine carrée*

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B différente de A et $-A$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 101. *Commutant*

1) Trouver le commutant de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Même question, en considérant $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.

Exercice 102. *Commutant, Centrale MP 2000*

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A.

1) Pour $n = 2$, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 2 ou 4, en donner une base.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est de dimension $\geqslant n$ (traiter d'abord le cas où A est diagonalisable).

Exercice 103. *Ulm MP* 2001*

En se déplaçant uniquement sur les arêtes d'un cube de côté 1, combien y a-t-il de chemins de longueur n pour aller d'un point à un autre ?

Réduction par blocs

Exercice 104. *Matrice bloc*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 105. *Matrice bloc*

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1) Comparer les valeurs propres de A et M.

2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = XP'$. Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.

3) A quelle condition sur A, M est-elle diagonalisable ?

Exercice 106. *Ensi P 90*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 107. *Matrice bloc*

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est (chercher les sous-espaces propres de M en fonction de ceux de A).

Exercice 108. *Matrice triangulaire par blocs*

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A, C carrées. On suppose que A et C sont diagonalisables sans valeurs propres communes. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 109. *Matrice bloc*

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable avec A carrée d'ordre p.

Soit λ une valeur propre de M de multiplicité m. Montrer que si $p > n - m$, alors λ est valeur propre de A.

Exercice 110. *Réduction par blocs, Centrale MP 2003*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{sp}(B)$ et fonction de $\mathrm{sp}(A)$.

Exercice 111. $A^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, Mines MP 2003*

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Représenter dans un plan l'ensemble des couples (a, b) tels que $A^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Image et noyau

Exercice 112. *Chimie P 1996*
Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Est-il vrai que : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$?

Exercice 113. *u est diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}) + \operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est directe*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Pour $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, on note $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id})$ et $F_\lambda = \operatorname{Im}(u-\lambda\,\mathrm{id})$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$.

Exercice 114. $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 115. *$rg(f - \lambda\,\mathrm{id})$*
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id})^2$.

Exercice 116. *Nombre de noyaux et d'images*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les ensembles $\mathcal{K} = \{\operatorname{Ker}(P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\operatorname{Im}(P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ sont finis et ont même cardinal.

Exercice 117. $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = 2\dim(\operatorname{Ker} f)$, *Mines-Ponts MP 2005*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = 2\dim(\operatorname{Ker} f) = 2d$. Montrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $g^k = f$ alors k divise d.

Sous-espaces stables

Exercice 118. *Droites et hyperplans stables*
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.
2) Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u (considérer $\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ où λ est une valeur propre de u).
3) Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 119. *Plan stable pour une valeur propre non réelle*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M.
1) Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M.
2) Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.
3) Soient $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.
4) Soit $F = \mathrm{vect}(U, V)$. Montrer que F est stable par φ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M) et donner la matrice de $\varphi_{|F}$ dans la base (U, V).

Exercice 120. *Plans stables*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non constant, diviseur de μ_f, tel que $F \subset \operatorname{Ker} P(f)$.
2) Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un diviseur de μ_f de degré 2. Montrer que $\operatorname{Ker} P(f)$ contient un plan stable par f.
3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

Exercice 121. *Recherche de sev stables*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les sev de $\mathbb{R}^3$ stables pour l'endomorphisme associé à A.

2) Quelles sont les matrices réelles commutant avec A ?

Exercice 122. *Plan affine stable*

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H : x + 2y + 3z = 1$ un plan *affine* de E. Montrer que si H est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ alors 1 est valeur propre de f.

Exercice 123. *χ_u irréductible*

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. Montrez que seuls $\{0\}$ et E sont stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Exercice 124. *Endomorphisme semi-simple.*

Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f. Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

Exercice 125. *Endomorphisme semi-simple, Polytechnique MP* 2000*

Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E tel que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f. Que peut-on dire de f ? Réciproque ?

Exercice 126. *Sous-espaces stables, Centrale MP 2003*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 127. *Mines 2017*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrez que f est diagonalisable si et seulement s'il existe $H_1, \dots, H_n$ des hyperplans de E stables par f tels que $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.

Trigonalisation

Exercice 128. *$AB = 0$*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

Exercice 129. *Produit de matrices nilpotentes*

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes et commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \dots A_n = 0$.

Exercice 130. *Matrices nilpotentes*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 131. *Mines MP 2003*

Soit E un ev de dimension finie et (u_n) une suite d'endomorphismes diagonalisables convergeant vers un endomorphisme u. u est-il diagonalisable ?

Exercice 132. *Mines-Ponts MP 2005*

On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n non inversible. Soient α, β les multiplicités de zéro dans χ_M et μ_M. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} M) = \alpha$ si et seulement si $\beta = 1$.

Exercice 133. *ENS 2014*

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles toutes diagonalisables ? Sinon, trigonalisables ?

Divers

Exercice 134. $\|g-\mathrm{id}\|<1$, *Ulm MP 2012*
Soit $\| \ \|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $g \in G$: $\|g-\mathrm{id}\|<1$. Montrer que G est réduit à $\{\mathrm{id}\}$.

Exercice 135. *Matrices nilpotentes, Mines MP 2012*
Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Exercice 136. *Ens Lyon MP 2012*
Soient $S, R \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $S^2 = R^3 = I_n$ et $RS = SR^{-1}$. Montrer que S et R sont simultanément diagonalisables par blocs, avec des blocs de taille 1 ou 2.

Exercice 137. *Rangs itérés, ULC 2010*
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d et $f \in \mathcal{L}(V)$.
1) Montrer que la suite $(\mathrm{rg}(f^n))$ converge. On note $r(f)$ sa limite.
2) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors $r(f+g) \leqslant r(f) + r(g)$. Trouver un contre-exemple si $g \circ f \neq f \circ g$.
3) Exprimer $r(f)$ à partir du polynôme caractéristique de f.

solutions

Exercice 1.

1) 0 et les racines de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.

2) $\sin\alpha + \sin 2\alpha$, $-\sin\alpha$, $-\sin 2\alpha$.

Exercice 2.

1) $\mathrm{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ est valeur propre d'ordre au moins $n-2$. $E_0 = \{a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
vp $\lambda \neq 0$: $\lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2) = 0$. Il y a deux racines distinctes, $E_\lambda = \mathrm{vect}((a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda))$.

2) A est diagonale. vp $= 0$ et a_n.

Exercice 3.

1) $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

2) $-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 4.

Soit $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de A et $Q_n(x)$ celui de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le premier 1 par 2. On a les relations de récurrence :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

D'où pour $x \notin \{0, 4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \qquad \text{avec } x = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Les valeurs propres de A autres que 0 et 4 sont les réels $x_k = 2(1 - \cos(k\pi/n))$ avec $0 < k < n$ et 0 est aussi valeur propre (somme des colonnes nulle) donc il n'y en a pas d'autres.

Exercice 5.

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(6, -1)$.

2) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-2, 7)$.

3) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-3, 2)$.

4) $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(6, 2)$.

5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, 2, -2)$.

6) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-1, -3, 6)$.

7) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1 + i, 1 - i, 2)$.

8) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, 3, 3)$.

9) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, 0, 2)$.

10) $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, -1, 2)$.

11) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, 2, 2)$.

12) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1, -1, 3, -3)$.

13) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(2, 2, 2, -2)$.

14) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(2, 2, -2, -2)$.

15) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -99 \\ 0 & 0 & 21 & 99 \\ 0 & 1 & -11 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(-5, 2, -4, -16)$.

16) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(2, 1, 3, -1)$.

Exercice 6.

1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & -7 \\ & 0 & 0 & 20 \\ & & 0 & -4 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

$$n \text{ pair : } P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}, \ D = \operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1).$$

$$n \text{ impair : } P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \ D = \operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1).$$

Exercice 8.

$P = (\omega^{(i-1)(1-j)})$, $D = \operatorname{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$ avec $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

Exercice 9.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \operatorname{diag}(a+b+c+e, a-b-c+e, -a+b-c+e, -a-b+c+e).$$

Exercice 10.

$\lambda = 0 :\ E_0 = \{x \text{ tq } x_1 + \dots + x_q + x_{n-q+1} + \dots + x_n = 0\}$,

$\lambda = 2\min(p,q) :\ E_\lambda = \operatorname{vect}((\underbrace{1,\dots,1}_{p},0,\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{p}))$.

Exercice 14.

$$\textbf{1)}\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & (0) \\ & 2 & 2 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & n \\ (0) & & & & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

$u(X^k) = -kX^k + (k-2n)X^{k+1} \Rightarrow$ la matrice de u est triangulaire inférieure. $\operatorname{sp}(u) = \{0,-1,\dots,-2n\}$.

$\lambda = -k :$ Résoudre l'équation différentielle $\Rightarrow P = cX^k(X-1)^{2n-k}$.

Exercice 17.

$\alpha^3 : (X-\beta)(X-\gamma)$, $\beta^3 : (X-\alpha)(X-\gamma)$, $\gamma^3 : (X-\alpha)(X-\beta)$.

Exercice 18.

$\lambda = 1 :\ P = Q((X-1)^2)$. $\lambda = -1 :\ P = (X-1)Q((X-1)^2)$.

Exercice 19.

$\lambda = 1 :\ P = aX + b$.

Exercice 20.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \cdots & -a^n \\ & 2 & -2a & & (0) \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -na \\ (0) & & & & n+1 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Ker} f = \{$polynômes constants$\}$, $\operatorname{Im} f = \{$polynômes divisibles par $X-a\}$.

Valeurs propres : $0,2,3,\dots,n+1$. Pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $E_k = \operatorname{vect}((X-a)^{k-1})$.

Exercice 21.

Oui ssi $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ ou $A = 0$.

Exercice 22.

1) $(-1)^n(X^n - a_nX^{n-1} - \ldots - a_1)$.

2) Étude de $x \mapsto (x^n - a_nx^{n-1} - \ldots - a_1)/x^n$.

3) Inégalité triangulaire.

4) Expression générale de A^k.

Exercice 24.

$\operatorname{spec}(T) =]-1, 1]$.

Exercice 25.

2) $0 < \lambda \leqslant 1$: $f(x) = Cx^{1/\lambda - 1}$.

Exercice 26.

$1/k$, $k \geqslant 1$.

Exercice 27.

$\lambda = \dfrac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$: $u(x) = C\sin(\pi/2 + k\pi)x$.

Exercice 29.

3) $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(0, 2, -2)$.

Exercice 30.

1) 1 si $C \neq 0$, 0 si $C = 0$.

2) $\dim(E_0) \geqslant n - 1 \Rightarrow X^{n-1}$ divise $\chi_M \Rightarrow \chi_M = (-1)^n(X^n - (a_1^2 + \ldots + a_n^2)X^{n-1})$.

3) Oui.

Exercice 31.

$\operatorname{rg} A = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} A = n - 1$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$. La somme des valeurs propres est $\operatorname{tr} A = n$ donc la dernière valeur propre est n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Donc A est diagonalisable.

Exercice 32.

1) La fonction $f_n : x \mapsto P_n(x)/x^n$ croît strictement de $-\infty$ à 1 quand x varie de 0 à $+\infty$.

2) $\chi_A(x) = (-1)^n(x^n - \sum_{k=1}^n kx^{n-k})$.

Exercice 33.

Soit $M = (x_iy_j)$: M est de rang inférieur ou égal à 1, donc 0 est valeur propre de M d'ordre au moins $n - 1$. Comme $\operatorname{tr}(M) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M(x) = (-x)^{n-1}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n - x),$$

et le déterminant demandé est $\Delta_n = \chi_M(-1) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n + 1$.

Exercice 34.

1) $\det(M + (t))$ est une fonction affine de t.

2) $|\lambda + a| = k|\lambda + b|$ et $\lambda = x + iy \Rightarrow (1 - k^2)(x^2 + y^2) + \ldots = 0$, équation d'un cercle si $|a| \neq |b|$.

Exercice 35.

1) $a_1 \ldots a_n + b_1a_2 \ldots a_n + a_1b_2a_3 \ldots a_n + \ldots + a_1 \ldots a_{n-1}b_n$.

3) $\dfrac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^n (a_i - t)} = 1 + \sum_{i=1}^n \dfrac{b_i}{a_i - t}$ change de signe entre deux a_i successifs et dans l'un des intervalles $]-\infty, a_1[$ ou $]a_n, +\infty[$ donc χ_A admet n racines distinctes.

4) Oui. Supposons par exemple $a_1 = \ldots = a_p < a_{p+1} < \ldots < a_n$: La question précédente met en évidence $n - p$ racines simples de χ_A entre les a_i et $\pm\infty$, et a_1 est aussi racine d'ordre $p - 1$ de χ_A. Or les p premières lignes de $A - a_1I$ sont égales donc $\operatorname{rg}(A - a_1I) \leqslant n - p + 1$ et $\dim(\operatorname{Ker}(A - a_1I)) \geqslant p - 1$ d'où la diagonalisabilité. Le cas où il y a plusieurs groupes de a_i égaux se traite de même.

Exercice 36.
$\chi_B(X) = \dfrac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$, $\chi_C(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Exercice 39.
a $\Leftrightarrow$ **b** : thm du rang.
c $\Leftrightarrow$ **d** : immédiat.
c $\Rightarrow$ **b** : si $AX = XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X = XP(B)$.
$\overline{\mathbf{c}} \Rightarrow \overline{\mathbf{b}}$: prendre U vecteur propre de A, V vecteur propre de ${}^tB$ associés à la même valeur propre et $X = U{}^tV$.

Exercice 41.
On suppose que *inversible* signifie *inversible dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à dire que le déterminant vaut ± 1.
$\det(A + kB)$ est un polynôme en k de degré inférieur ou égal à 2 prenant la même valeur, 1 ou -1 en trois points distincts ; il est constant.

Exercice 42.
Somme des valeurs propres $= n$.

Exercice 43.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il faut en fait prouver que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(A^p) = \mathrm{tr}(A)$. Remarquer qu'on n'a pas forcément $A^p = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est faux, entre autres, si A est nilpotente non nulle. Soit X une indéterminée sur $\mathbb{K}$. On a dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$: $(A - XI_n)^p = A^p - X^pI_n$, d'où, en prenant les déterminants : $\chi_{A^p}(X^p) = \chi_A(X)^p = \chi_A(X^p)$ et on égale les coefficients de $X^{(n-1)p}$.

Exercice 44.
1) μ divise χ par Cayley-Hamilton et a les mêmes racines, les valeurs propres de M.
2) **a)** Pour $P(X) = X^p$ c'est la factorisation bien connue de $a^p - b^p$; pour P quelconque additionner les factorisations pour chaque monôme.
b) Prendre $P = \mu$ et calculer les déterminants.

Exercice 45.
1) Trigonaliser.
2) **(a)$\Longrightarrow$(b)** : B a même polynôme caractéristique que la matrice nulle, $(-X)^n$, donc $(-B)^n = 0$. De plus, pour M quelconque, $\mathrm{tr}((AM + B)^2) = \mathrm{tr}((AM)^2)$, d'où $0 = \mathrm{tr}(AMB + BAM) = 2\,\mathrm{tr}(BAM)$. Ceci entraîne classiquement $BA = 0$.

(b)$\Longrightarrow$(a) : pour $\lambda \neq 0$, la matrice $B - \lambda I$ est inversible et on a pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\det(AM + B - \lambda I) &= \det(B - \lambda I)\det((B - \lambda I)^{-1}AM + I)\\ &= (-\lambda)^n \det((B - \lambda I)^{-1}AM + I)\\ &= \det(-\lambda(B - \lambda I)^{-1}AM - \lambda I).\end{aligned}$$

De plus, $(B - \lambda I)A = -\lambda A$, donc $A = -\lambda(B - \lambda I)^{-1}A$ et il vient $\det(AM + B - \lambda I) = \det(AM - \lambda I)$ pour tout $\lambda \neq 0$, donc aussi pour $\lambda = 0$ par caractère polynomial en λ des deux membres.

Exercice 46.
$a = b$ ou a, b non nuls.

Exercice 49.
2) $(A - xI)({}^tA - xI) = (x^2 - 2x + 4)I$, $\chi_A(x) = x^2 - 2x + 4$.
3) ${}^tA = 2I - A$ donc $(A - xI)((2 - x)I - A) = (x^2 - 2x + 4)I$. En prenant pour x une des racines du polynôme $x^2 - 2x + 4$, on obtient un polynôme scindé à racines simples annulant A.

Exercice 51.
A est diagonalisable car $A^2 = I$. $e^A = (\mathrm{ch}\,1)I + (\mathrm{sh}\,1)A$.

Exercice 52.

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ alors $u^2 = 0$ donc 0 est l'unique valeur propre de u et $u \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable. Si $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et donc $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u = E$. Or $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces propres de u donc u est diagonalisable.

Exercice 54.

1) polynôme annulateur simple.

2) Non, ctrex = B nilpotent.

Exercice 55.

$X^4 = 0$ donc X est nilpotente et son indice est strictement supérieur à 2 ; il n'y a pas de solution.

Exercice 56.

$\operatorname{sp}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Exercice 57.

A est $\mathbb{C}$-diagonalisable et les valeurs propres sont $\alpha > 0$ et $\beta, \overline{\beta}$ avec la même multiplicité.

Exercice 59.

A est diagonalisable et a n valeurs propres distinctes, sinon il existerait un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n-1$. Ces racines sont les n racines n-èmes de 1 et leur somme est nulle.

Exercice 60.

A est $\mathbb{C}$-diagonalisable (polynôme annulateur à racines simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Les dimensions sont conservées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62.

Les f_i sont des projecteurs commutant deux à deux, ils sont simultanément diagonalisables. Soit e_1 tel que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geqslant 2$ donc les supports des restrictions des f_i à une base propre commnue sont deux à deux disjoints non vides, ce sont des singletons.

Exercice 63.

Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ, de f. Alors $p_\lambda = P(f)$.

Exercice 64.

3) $\operatorname{sp}(u_k) \subset \{i, -i\}$ d'après la relation $u_k^2 = -\operatorname{id}_E$. Si le spectre était réduit à un élément alors u_k serait scalaire car diagonalisable, mais ceci est incompatible avec la relation d'anticommutation entre u_k et u_ℓ. Donc $\operatorname{sp}(u_k) = \{i, -i\}$.

4) u_ℓ avec $\ell \neq k$ échange les sous-espaces propres de u_k donc ils ont même dimension $n/2$.

Exercice 67.

1) Calcul Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.

2) **c)** $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.

d) Si $P(u) = 0$ alors $u \circ P'(u) = 0$ donc P (polynôme minimal) divise XP' ce qui implique $P(X) = X^k$ pour un certain k.

Exercice 69.

Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \operatorname{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geqslant 1$ *et il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que toutes les racines de P sont congrues à u/n modulo* 1. Cette condition est clairement suffisante.

Exercice 70.

On écrit $C = PJQ$ où P, Q sont inversibles et J est la matrice canonique de rang r.
Alors $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$ donc $P^{-1}AP$ et QBQ^{-1} sont triangulaires par blocs avec le même bloc diagonal $r \times r$, ce qui prouve que χ_A et χ_B ont un facteur de degré r en commun.

Exercice 71.

Le polynôme s'écrit $(X^2+1)(X^2+X+1)$. Il n'a donc pas de racine réelle. Or tout élément de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre et cette valeur propre devrait être également racine du polynôme minimal. Par conséquent la réponse est non.

Exercice 72.

1) Que c'est un isomorphisme (et réciproquement).
2) Soit $Q(X) = P(X)/X$. On a $u \circ Q(u) = 0$ et X, Q sont premiers entre eux, d'où $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} Q(u)$. On conclut avec le théorème du rang.
3) Même méthode.

Exercice 73.

1) Toute valeur propre de f doit être racine de P, d'où $\operatorname{sp}(f) = \varnothing$. En dimension impaire, χ_f est de degré impair donc admet au moins une racine réelle ; c'est absurde.
2) Immédiat.
3) La matrice de la restriction de f à H_x dans la base (y, x) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$. Supposons avoir trouvé un sev F stable par f et une base de F dans laquelle la matrice de la restriction de f est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à A. Si $F = E$ le problème est résolu. Sinon, on choisit $x \in E \setminus F$ et on considère le plan H_x. Il est en somme directe avec F car $F \cap H_x$ est un sev non trivial de H_x stable par f donc de dimension impaire. Le sev $F \oplus H_x$ vérifie la même propriété que F (stable par f et la restriction est diagonalisable par blocs avec des blocs diagonaux égaux à A). On peut donc continuer jusqu'à atteindre E.

Exercice 74.

Toute valeur propre de A est racine de P.

Exercice 75.

On écrit $A = I_n + mB$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Les valeurs propres de B sont de la forme $\dfrac{e^{2ik\pi/p} - 1}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$; elles ont un module inférieur ou égal à $2/m < 1$. Le produit des valeurs propres non nulles, s'il y en a, est au signe près le coefficient de plus bas degré de χ_B donc un entier. On en déduit que $\operatorname{sp}(B) \subset \{0\}$ et B est $\mathbb{C}$-diagonalisable, comme A, d'où $B = 0$ et $A = I_n$.

Exercice 77.

2) a) Pour $p \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.
b) $(\lambda \in \operatorname{sp}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists\, v \neq 0 \text{ tq } v \circ (u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \operatorname{id}_E \text{ n'est pas surjectif}) \Leftrightarrow (\lambda \in \operatorname{sp}(u))$. Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ on a :

$$(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker} v)$$

donc $\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(H, E)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.
On en déduit : $\dim(\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E)\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.

Exercice 78.

$\lambda = 1$: $\operatorname{Dir}(p) \subset \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Base}(p)$.
$\lambda = 0$: $f(\operatorname{Base}(p)) \subset \operatorname{Dir}(p)$.

Exercice 80.

1) Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Exercice 81.

3) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 82.

Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Alors il existe $\ell \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :

$$\forall\, x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall\, x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x)f^{k-1}(a) + \ell(f(x))f^{k-2}(a) + \ldots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f-monogène engendré par a est égal à E, soit : $(a, \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \ldots + \alpha_{n-1}f^{n-1}(a)$.
Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1}f^{n-1} - \ldots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall\, x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x)f^{n-1}(a) + \ldots + \ell(f^{n-1}(x) - \ldots - \alpha_1 x)a.$$

Ceci implique $\ell(x) = 0$ pour tout x, en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Exercice 83.

1) Oui, les applications $u \mapsto p \circ u$ et $u \mapsto u \circ p$ le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.

2) Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} p$ et d'une base de $\operatorname{Im} p$.
Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{sp}(\varphi) \subset \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ et $d_{1/2} = 2r(n-r)$.

Exercice 84.

Si D est diagonalisable alors les applications $X \mapsto DX$ et $X \mapsto XD$ le sont (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simultanément diagonalisables et leur différence, φ_D, est aussi diagonalisable.
Pour la réciproque, on commence par constater que si P est un polynôme quelconque, alors :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\varphi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(formule du binôme pour $P = X^m$ et linéarité de chaque membre par rapport à P pour P quelconque).
Supposons φ_D diagonalisable, prenons P annulateur scindé à racines simples de φ_D, $X = U^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Donc :

$$0 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k U^tV \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^tV \sum_{k=0}^{\deg(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^tV P(D - \lambda I).$$

Comme $U \neq 0$, ceci implique ${}^tV P(D - \lambda I) = 0$ pour tout V, donc $P(D - \lambda I) = 0$. Ainsi $D - \lambda I$ est diagonalisable et D itou.

Exercice 86.

1) 1 est valeur propre double, $d_1 = 1$.

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $X = \begin{pmatrix} (6\alpha t + \gamma)e^t + 2\beta \\ (6\alpha t + \gamma + 3\alpha)e^t + \beta \\ (6\alpha t + \gamma - \alpha)e^t + 2\beta \end{pmatrix}$.

Exercice 88.

1) $A \sim \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^{-1})$ où α est une racine primitive $7^{\text{ème}}$ de 1,
$A \sim \mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{10}, \alpha^{-11})$ où α est une racine primitive $37^{\text{ème}}$ de 1.

2) pas de solution.

3) $\mathrm{vp} = 0$ ou 1.

Exercice 90.

On se ramène à $\lambda = 0$ en remplaçant f par $f - \lambda\,\mathrm{id}$. $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1 stable par f donc $f_{|\,\mathrm{Im}\, f}$ est une homothétie, c'est l'application nulle vu $\mathrm{sp}(f)$. On en déduit $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. Soit $e_2 \in \mathrm{Im}\, f \setminus \{0\}$, e_3 un antécédant de e_2 par f et $e_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ indépendant de e_2. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient.

Exercice 91.

Soit f un endomorphisme d'un ev E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$. Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.

$n \leqslant 1$: on a $f = 0$ donc $g = \mathrm{id}_E$ convient.

$0, \dots, n-1 \Rightarrow n$: f est non surjectif donc l'hypothèse de récurrence s'applique à $f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$.
Soit $g_1 \in GL(\mathrm{Im}(f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ avec $H = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, $H \oplus I = \mathrm{Im}(f)$ et $H \oplus K = \mathrm{Ker}(f)$. La restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(f)$, on note φ l'isomorphisme réciproque. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$g(h + i + k + \ell) = g_1(h + i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

On vérifie facilement que $f \circ g = 2g \circ f$ et il reste à prouver que g est injective. Si $x = h+i+k+\ell \in \mathrm{Ker}\, g$ alors $g(f(x)) = g_1(f(i + \ell)) = 0$ donc $i + \ell \in \mathrm{Ker}\, f = H \oplus K$ soit $i = \ell = 0$. Il reste $g_1(h) + k = 0$ ce qui implique $h = k = 0$ car $g_1(h) \in \mathrm{Im}\, f = H \oplus I$.

Remarque : la démonstration passe à tout corps de caractéristique différente de 2.

Exercice 92.

1) $A^{2k} = I$, $A^{2k+1} = A$.

Exercice 93.

3) $\alpha_n = -\frac{1}{3} + \frac{2^n}{4} + \frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n = \frac{2^n-(-2)^n}{4}$, $\gamma_n = \frac{4}{3} - \frac{2^n}{2} + \frac{(-2)^n}{6}$.

Exercice 94.

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$.
$2u_n = (6 - 6.2^n + 2.3^n)u_0 + (-5 + 8.2^n - 3.3^n)u_1 + (1 - 2.2^n + 3^n)u_2$.

Exercice 95.

1) Le polynôme minimal de f est de degré supérieur ou égal à n et n'a pas de diviseurs non triviaux. Donc $\dim E = 1$ et f est une homothétie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut aussi avoir $\dim E = 2$ et f n'a pas de valeurs propres réelles.

Exercice 96.

1) Diagonaliser ${}^tM \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cste}$.

2) $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$ donc si $y_0 \neq x_0$ alors $M_n \to \infty$ sinon la suite est constante.

3) $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Exercice 98.

2) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou l'inverse.

Exercice 99.

$M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1/5 & \pm 2 & 0 \\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 & 0 \\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 100.

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(0,1,1)$. On prend $B = PMP^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 101.

1) $\mathrm{sp}(M) = \{1, \sqrt{6}-1, \sqrt{6}+1\}$, M est diagonalisable et son commutant est l'ensemble des polynômes en M : $aI + bM + cM^2$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2) M est cyclique.

Exercice 102.

1) Par similitude on se ramène aux cas : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ou $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$ ou $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$.

2) Si A est diagonalisable de valeurs propres λ_i avec les multiplicités n_i alors $\dim(\mathcal{C}(A)) = \sum n_i^2 \geqslant n$. Dans le cas général, soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables convergeant vers A et $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ une suite de n-uplets de matrices commutant avec A_k telles que $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ est une famille orthonormale pour un produit scalaire quelconque choisi sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par compacité il existe une sous-suite convergente, donc n matrices C_∞^i formant une famille orthonormale et commutant avec A d'où $\dim(\mathcal{C}(A)) \geqslant n$.

Exercice 103.

Soit $d_n(i,j)$ le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j. j admet trois voisins k_1, k_2, k_3 et l'on a : $d_n(i,j) = d_{n-1}(i,k_1) + d_{n-1}(i,k_2) + d_{n-1}(i,k_3)$. On numérote les sommets de 0 à 7 de sorte que les voisins du sommet i sont les sommets $i+1 \bmod 8$, $i+2 \bmod 8$ et $i+4 \bmod 8$. Le vecteur $d_n = (d_n(0,0), \dots, d_n(0,7))$ vérifie la relation de récurrence $d_n = Ad_{n-1}$ où A est la matrice suivante (. désigne 0) :

$$A = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . \\ . & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} B+I_4 & 0 \\ 0 & B-I_4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} . & 1 & 1 & . \\ 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$B \pm I_4 = \begin{pmatrix} C \pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C \pm I_2 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} C \pm I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & C \pm I_2 - I_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

et enfin,

$$C \pm I_2 \pm I_2 = \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1 \pm I_1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 + I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1 \pm I_1 - I_1 \end{pmatrix}R^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable de valeurs propres $-3, -1, 1, 3$ et on peut certainement terminer les calculs pour obtenir $d_n = A^n d_0$.

Exercice 105.

2) Par récurrence pour $P = X^k$, puis par linéarité.

3) Si M est diagonalisable, on prend $P = \mu_M$: donc μ_A divise P et XP' et P est scindé à racines simples. La seule racine simple possible est 0, d'où $A = 0$.

Exercice 106.

S'inspirer du cas $n = 1$. Soit $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, donc A aussi.

Exercice 107.
$E_\lambda(M) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tq } AY = \lambda^2 Y\right\}$.

Exercice 110.
Calcul du polynôme caractéristique de B par opérations en blocs. On obtient

$$\chi_B(x) = \det(x^2 I - 2xA - A^2) = (-1)^n \chi_A\Big(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\Big)\chi_A\Big(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\Big)$$

donc

$$\mathrm{sp}(B) = \{(1+\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} \cup \{(1-\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

Exercice 111.
En prenant $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & 0 & 0 \\ ab-b^2 & a^2-ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+ab & b^2+ab \\ 0 & 0 & b^2+ab & a^2+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.
En prenant $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1}M_2P_1 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{sp}(A) = \{(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)\}$, donc l'ensemble cherché est la boule unité ouverte pour $\|\ \|_1$.

Exercice 114.
Si $P(0) \neq 0$ alors f est bijective. Si $P(0) = 0$ alors $f^2 \circ \mathrm{qqch} = -P'(0)f \Rightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 116.
Soit μ le polynôme minimal de u et $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de μ. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $d = P \wedge \mu$ on a facilement $\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(d(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u)) = \operatorname{Im}(d(u))$. Ceci montre déjà que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}$ sont finis.

De plus, si $d \in \mathcal{D}$ alors l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Im}(d(u))}$ est μ/d donc l'application $d \mapsto \operatorname{Im}(d(u))$ est injective sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{card}(\mathcal{I}) = \mathrm{card}(\mathcal{D})$. De même, l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Ker}(d(u))}$ est d car $\operatorname{Ker}(d(u)) \supset \operatorname{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ et d est l'annulateur minimal de $u_{|\operatorname{Im}(\mu/d(u))}$ donc l'application $d \mapsto \operatorname{Ker}(d(u))$ est injective sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{card}(\mathcal{K}) = \mathrm{card}(\mathcal{D})$.

Exercice 117.
En appliquant le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Ker} f^2}$, on a : $\dim(\operatorname{Ker} f^2) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(f(\operatorname{Ker} f^2))$, et $f(\operatorname{Ker} f^2) \subset \operatorname{Ker} f$, donc $f(\operatorname{Ker} f^2) = \operatorname{Ker} f$. Soit $G_i = \operatorname{Ker} g^i$. Montrons que $g(G_{i+1}) = G_i$ pour tout $i \in [\![0,k]\!]$: si $x \in G_{i+1}$ alors $g^i(g(x)) = g^{i+1}(x) = 0$ donc $g(x) \in G_i$. Réciproquement, si $y \in G_i$ alors $y \in G_k = f(G_{2k})$, donc y a un antécédant x par f, cet antécédant appartient à G_{i+k}, et $y = g(g^{k-1}(x)) \in g(G_{i+1})$.
On en déduit, avec le théorème du rang appliqué à $g_{|G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\operatorname{Ker} g)$ pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, d'où $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k\dim(\operatorname{Ker} g) = k\dim(\operatorname{Ker} g)$.

Exercice 121.
1) Valeurs propres : $1, j, j^2$. sev stables : $\{0\}$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle$ et $\mathbb{R}^3$.
2) $AB = BA \Rightarrow \varphi_B(e_3) = \lambda e_3$, ${}^tA{}^tB = {}^tB{}^tA \Rightarrow \varphi_{{}^tB}(e_3) = \lambda e_3$, d'où $B = \begin{pmatrix} a+\mu & a & 0 \\ -3a & -2a+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 122.
Soit $\varphi(x,y,z) = x + 2y + 3z$. f conserve la surface de niveau $\varphi = 1$ donc par linéarité $\varphi \circ f = \varphi$ et φ est vecteur propre de ${}^tf$.

Exercice 123.

Si χ_u est irréductible, pour $x \neq 0$ le polynôme minimal de x en u est égal à χ_u donc le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E et il n'y a pas de sous-espace stable non trivial.

Si seuls $\{0\}$ et E sont stables, soit $x \neq 0$. Le sous-espace cyclique engendré par x est égal à E donc l'annulateur minimal de u en x est égal à χ_u. Soit P un diviseur non trivial de χ_u et $y = P(u)(x)$: l'annulateur minimal de u en y est χ_u/P, absurde.

Exercice 125.

Si E est de dimension finie, soit F un hyperplan de E, $\langle e\rangle$ un supplémentaire stable et H un supplémentaire de $\langle e\rangle$ stable. Si K est un sev de H, alors K admet un supplémentaire K' dans E stable et $H \cap K'$ est un sev de H stable, en somme directe avec K. $K' \not\subset H$ car $K \subset H$ et $K \oplus K' = E$ donc $K' + H = E$ et $\dim(H \cap K') = \dim(H) + \dim(K') - \dim(E) = \dim(H) - \dim(K)$ soit $K \oplus (H \cap K') = H$. $f_{|H}$ vérifie la même propriété que f et on obtient par récurrence que f est diagonalisable.

Réciproquement, soit f diagonalisable, F un sev de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base propre pour f. On montre que F admet un supplémentaire stable par récurrence sur $\operatorname{codim}(F)$: si $F = E$ alors $\{0\}$ convient et si $F \neq E$ alors il existe i tel que $e_i \notin F$ d'où $F \oplus \langle e_i\rangle$ est un sur-espace strict de F, admettant un supplémentaire G stable, d'où $G \oplus \langle e_i\rangle$ est supplémentaire de F stable.

Cas E de dimension infinie : ???

Exercice 126.

$\operatorname{sp}(f) = \{0, 1, 2\}$ donc f est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Comme la restriction d'un diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable, les sous-espaces stables par f sont les huit sous-sommes de $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

Exercice 127.

La condition est nécessaire : prendre une base propre pour f et considérer les hyperplans engendrés par $n-1$ de ces vecteurs propres. On démontre sa suffisance par récurrence sur n :

Le cas $n = 1$ est trivial.

Dans le cas général, il résulte de la formule de Grassman que si F et G sont deux sous-espaces de E on a $\operatorname{codim}(F \cap G) \leqslant \operatorname{codim}(F) + \operatorname{codim}(G)$ où $\operatorname{codim}(X) = \dim(E) - \dim(X)$. Puis, par itération : $\operatorname{codim}(H_1 \cap \ldots \cap H_p) \leqslant p$ pour tous hyperplans $H_1, \dots, H_p$. En conséquence $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}) \geqslant 1$ et le fait que ce sous-espace ait une intersection avec H_n nulle implique $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}) \leqslant 1$. Ainsi $H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$ est une droite stable par f et H_n est un hyperplan lui aussi stable par f et supplémentaire de $H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$. Les sous-espaces $H'_i = H_i \cap H_n$ ($i \leqslant n-1$) sont des hyperplans de H_n (s'il y en a un égal à H_n, l'intersection complète ne peut être nulle vu sa codimension). Ils sont stables par f et leur intersection est nulle. Par hypothèse de récurrence, il existe une base de H_n propre pour f et on la complète avec un vecteur non nul dans $H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$.

Exercice 130.

0 est valeur propre, se placer dans un hyperplan stable et récurer.

Exercice 131.

Non. Prendre $\operatorname{Mat}(u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$.

Exercice 132.

Trigonaliser fortement M.

Exercice 133.

Non, il existe une matrice ayant pour polynôme caractéristique $1 + \prod_{a \in \mathbb{K}} (X - a)$, non scindé.

Exercice 134.

Soit $g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de g où g est considérée comme une matrice complexe. La suite $(g^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à valeurs dans G, donc est bornée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il en résulte que la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée dans $\mathbb{C}$, soit : $|\lambda| = 1$. De même, $(g - \mathrm{id})^k \longrightarrow 0$ quand $k \to +\infty$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $(\lambda - 1)^k \longrightarrow 0$, soit : $|\lambda - 1| < 1$ et plus généralement $|\lambda^p - 1| < 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ceci implique $\lambda = 1$. Ainsi 1 est l'unique valeur propre de g. On écrit alors $g = \mathrm{id} + h$ avec h nilpotente, d'où $g^k = \mathrm{id} + kh + \binom{k}{2} h^2 + \ldots + \binom{k}{n-1} h^{n-1}$ est un polynôme en k à valeurs bornées quand k décrit $\mathbb{N}$. Ceci implique $h = 0$ et finalement $g = \mathrm{id}$.

Exercice 135.

Soit V ce sous-espace. V contient toutes les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $i \neq j$, donc toutes les matrices à diagonale nulle. Par ailleurs V est inclus dans l'hyperplan constitué des matrices à trace nulle. Reste donc à étudier le cas des matrices diagonales à trace nulle. Ces matrices sont engendrées par les matrices $E_{11} - E_{jj}$ pour $j \in [\![2, n]\!]$.

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ces trois matrices sont nilpotentes, donc toute matrice $E_{11} - E_{jj}$ est combinaison linéaire de nilpotentes et V est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 136.

La propriété est immédiate si $n = 1$ ou $n = 2$. On procède alors par récurrence en supposant la propriété vraie pour tout $k < n$. Soient S et R vérifiant les hypothèses pour n :
on a $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(R - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(R^2 + R + I_n)$ et ces deux sous-espaces sont stables par R et S. En effet, la stabilité par R est évidente et si $RX = X$ alors $RSX = SR^{-1}X = SX$. De même, si $(R^2 + R + I_{n+1})X = 0$, alors $(R^2 + R + I_n)SX = R^2SX + RSX + SX = SRX + SR^2X + SX = S(X + RX + R^2X) = 0$.

Si aucun de ces sous-espaces n'est égal à $\mathbb{C}^n$ alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits par les restrictions de R et de S.

Si $\mathrm{Ker}(R - I_n) = \mathbb{C}^n$ alors $R = I_n$ et R, S sont simultanément diagonalisables.

Si $\mathrm{Ker}(R^2 + R + I_n) = \mathbb{C}^n$, alors $0 = R^2 + R + I_n = (R - jI_n)(R - j^2 I_n)$. Soit X tel que $RX = jX$. Alors $RSX = SR^2X = S(-R - I_n)X = S(-j - 1)X = j^2SX$. On en déduit S induit un isomorphisme de $E_j(R)$ sur $E_{j^2}(R)$ (on savait que ces deux sous-espaces étaient de même dimension car R est semblable à R^{-1}. On prend donc $(X_1, X_2, \ldots, X_q)$ une base de $E_j(R)$. Alors $(X_1, SX_1, \ldots, X_q, SX_q)$ est une base dans laquelle les matrices des endomorphismes représentés par R et S dans la base canonique sont diagonales par blocs, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ pour R et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour S.

Exercice 137.

1) La suite est décroissante minorée, donc elle converge.

2) On écrit $\chi_f = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$. Les théorèmes de Cayley-Hamilton et de décomposition des noyaux donnent $V = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \,\mathrm{id})^{m_k}$. La matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\lambda_k I + N_k$, avec N_k nilpotente. On voit alors que $r(f) = d - m_0$, m_0 multiplicité de la valeur propre 0 (éventuellement $m_0 = 0$). Si g commute avec f alors les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \,\mathrm{id})^{m_k}$ sont stables par g. On considère w l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}\, f^{m_0}$ induit par g. On a $Ker f^{m_0} = \bigoplus_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(w - \mu_k \,\mathrm{id})^{n_k}$. Chacun de ces sous-espaces est stable par f, on fait une trigonalisation forte de la restriction de f. La matrice de $f + g$ dans la base ainsi construite sera diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme $\mu_k I + \tilde{N}_k$. On rajoute donc au plus $r(g)$ coefficients diagonaux non nuls. On en déduit que $r(f + g) \leqslant r(f) + r(g)$.

3) On a vu à la question précédente que $r(f) = d - m_0$.