Rang de matrices

Exercice 1. *Calcul de rang*

Chercher les rangs des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2. *Calcul de rang*

Chercher rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. *Calcul de rang*

Chercher rg $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et le cas échéant, donner une relation de dépendance linéaire entre les lignes.

Exercice 4. *Calcul de rang*

Chercher rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

Exercice 5. *Matrice à trou*

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.

Exercice 6. *Factorisation, Centrale P' 1996*

Soit la matrice carrée d'ordre n, I_p ($p \leqslant n$), telle que le i-ème terme diagonal vaut 1 si i est compris entre p et n, tous les autres coefficients étant nuls. Quelle sont les conditions sur A (matrice carrée d'ordre n) pour qu'il existe B telle que $AB = I_p$?

Exercice 7. *Échange de lignes*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j. Montrer que B est aussi inversible. Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?

Exercice 8. *Matrices de rang 1*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\mathrm{rg}(M) = 1 \Leftrightarrow$ il existe C, colonne et L, ligne, non nulles, telles que $M = CL$.

Dans le cas où M est symétrique, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $L = \lambda^t C$.

Exercice 9. *Matrices de projection de rang 1*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que A est une matrice de projection si et seulement si $\mathrm{tr}\, A = 1$.

Exercice 10. *Calcul de rang*

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots y_p \in \mathbb{K}$ avec $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. On note A, B les matrices de termes généraux $x_i + y_j$ et $(x_i + y_j)^2$. Chercher les rangs de A et B.

Exercice 11. *Juxtaposition de matrices*

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. On considère $C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p+q}(\mathbb{K})$.

Montrer que : $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) \Leftrightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ tq $B = AP$.

Exercice 12. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.

1) Montrer que : $\forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.

2) Montrer que : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.

3) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

4) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}({}^tAA)$.

Exercice 13. *Rang de* $\Re(M)$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(P) \leqslant 2$.

Exercice 14. *Calcul de rang*
Soit $M = (\cos(i+j-1)\theta) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{rg}\, M$ en fonction de θ.

Exercice 15. *Décomposition en blocs*
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice carrée décomposée en blocs. On suppose que A est inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}(D - CA^{-1}B)$.

Exercice 16. $MA = 0$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } MA = 0\}$. Quelle est la structure de E, sa dimension ?

Exercice 17. *Rang des applications* $X \mapsto AX, XB, AXB$
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Chercher le rang des applications :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & XB \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AXB \end{cases}$$

On transformera A et B en matrices canoniques équivalentes.

Exercice 18. *Rang de* $X \mapsto AX - XA$
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Chercher le rang de l'application : $\begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{cases}$

Exercice 19. *Matrice antisymétrique* 3×3
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ antisymétrique. Quel est le rang de M ?

Exercice 20. *Matrices antisymétriques*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique.

1) On suppose $a_{12} \neq 0$, et on décompose A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.
a) Montrer que P existe et est inversible.
b) Calculer AP.
c) En déduire que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.

2) Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Exercice 21. *Matrice à diagonale dominante*
Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est *à diagonale dominante* si : $\forall\, i,\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1) On transforme M en $M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot. Montrer que M_1 est à diagonale dominante.

2) En déduire que M est inversible.

Exercice 22. *Rang par blocs*
Soit une matrice M de rang r telle que : $M = \begin{pmatrix} M_r & M_2 \\ M_1 & M_3 \end{pmatrix}$, où la matrice M_r est carrée de rang r et de taille r. Montrer que $M_3 = M_1 M_r^{-1} M_2$.

Exercice 23. $\mathrm{rg}(BC)$, *Centrale MP 2006*

1) Soient deux matrices $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ de même rang r. Montrer que $A = BC$ est de rang r.

2) Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$. Montrer qu'il existe des matrices B et C comme précédemment telles que $A = BC$.

3) Déterminer explicitement une telle décomposition pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

4) Supposons de plus A symétrique. Montrer que CB est aussi de rang r.

Exercice 24. PA *nilpotente*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est non inversible si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA est nilpotente.

Exercice 25. *Matrice blocs, TPE MP 2012*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est le rang et éventuellement l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$?

solutions

Exercice 1.

1) 3.
2) 4.
3) 2.
4) 3.

Exercice 2.

rg $= 4$ si $m^3 + m^2 + 2 \neq 0$, rg $= 3$ sinon.

Exercice 3.

rg $= 3$ si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq -25$.
Si $\lambda = 2$: rg $= 2$, $11L_1 = 5L_2 + 9L_3$.
Si $\lambda = -25$: rg $= 2$, $L_1 + 2L_2 + 9L_3 = 0$.

Exercice 4.

rg $= 3$ si $a \neq \frac{1}{3}$ ou $b \neq -3$, rg $= 2$ sinon.

Exercice 5.

$\operatorname{rg} ABC \leqslant 2 \Rightarrow x = 13$. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

Les colonnes de A engendrent les $n - p$ derniers vecteurs de la base canonique.

Exercice 7.

Échange des lignes i et j.

Exercice 10.

$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x_i) \text{ et } (y_j) \text{ ne sont pas constantes} \\ 1 & \text{ou 0 sinon.} \end{cases}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 & \cdots & y_n^2 \\ 2y_1 & \cdots & 2y_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(B) = \begin{cases} 3 & \text{si } \operatorname{card}(x_i) \geqslant 3 \text{ et } \operatorname{card}(y_j) \geqslant 3 \\ 2 & \text{si } \min\big(\operatorname{card}(x_i), \operatorname{card}(y_j)\big) = 2 \\ 1 & \text{ou 0 sinon.} \end{cases}$

Exercice 12.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.

$M = \Re\left[\begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ \vdots \\ e^{ni\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & e^{(n-1)i\theta} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \operatorname{rg} M \leqslant 2$.

Le premier mineur 2×2 vaut $-\sin^2\theta \Rightarrow \operatorname{rg} M = 2$ si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Sinon, $\operatorname{rg} M = 1$.

Exercice 16.

E est un sev et un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est isomorphe à $\mathcal{L}(H, \mathbb{R}^n)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im} A$ dans $\mathbb{R}^n$. $\dim E = n(n - \operatorname{rg}(A))$.

Exercice 18.

rg $= 0$ si A est scalaire, rg $= 2$ sinon.

Exercice 19.

2 ou 0.

Exercice 23.

1) B admet r lignes indépendantes d'indices $i_1, \dots, i_r$ et C admet r colonnes indépendantes d'indices $j_1, \dots, j_r$. Soient B' et C' les sous matrices carrées associées dans B et C. Alors la sous-matrice de A d'indices $i_1, \dots, i_r$ pour les lignes et $j_1, \dots, j_r$ pour les colonnes est $B'C'$, de rang r. Donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ et l'inégalité inverse est bien connue.

2) Soient $i_1, \dots, i_r$ r indices tels que les lignes associées dans A sont linéairement indépendantes, et $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la sous-matrice correpondante. Par construction, $\mathrm{rg}(B) = r$. Chaque ligne de A étant combinaison linéaire des lignes de B, il existe $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = BC$. Et on a $r = \mathrm{nb.lignes}(C) \geqslant \mathrm{rg}(C) \geqslant \mathrm{rg}(A) = r$.

4) Comprendre dans cette question que B, C ne sont pas forcément les matrices construites en **2**. Notons $\mathrm{vect}(X)$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice X. De $A = BC = {}^tC^tB$ on tire $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$ et $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}({}^tC)$, et tous ces espaces sont de dimension r, donc ils sont égaux. On en déduit qu'il existe une matrice $P \in GL_r(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tCP$ d'où $CB = C^tCP$. $\mathrm{rg}(C^tC) = \mathrm{rg}(C) = r$ et P est inversible donc $\mathrm{rg}(CB) = r$.

Exercice 25.

Par opérations sur les lignes et les colonnes on obtient que M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$. On en déduit que M est de rang égal à $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B-A)$ et M est inversible si et seulement si A et $B - A$ le sont. On a $M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}.$$