Espaces vectoriels

Exercice 1. *Sev de $\mathbb{K}^3$ engendrés par deux vecteurs*
On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^3$: $a = (1,2,1)$, $b = (1,3,2)$, $c = (1,1,0)$, $d = (3,8,5)$.
Soient $F = \mathrm{vect}(a,b)$ et $G = \mathrm{vect}(c,d)$. Comparer F et G.

Exercice 2. *Essai de bases*
Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $a = (1,0,1)$, $b = (-1,-1,2)$ et $c = (-2,1,-2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $X = (x,y,z)$.

Exercice 3. *Rang de vecteurs*
Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$a = (3,2,1,0), \quad b = (2,3,4,5), \quad c = (0,1,2,3), \quad d = (1,2,1,2), \quad e = (0,-1,2,1).$$

Exercice 4. *Étude de liberté*
Étudier la liberté des familles suivantes :
1) $E = \{$ fcts : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (\sin, \cos)$.
2) $E = \{$ fcts : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
3) $E = \{$ fcts : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto |x-a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Modification des vecteurs d'une famille libre*
Soit E un espace vectoriel, $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires.
On pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, et $x'_i = x_i + y$. Étudier à quelle condition la famille $(x'_1,\dots,x'_n)$ est libre.

Exercice 6. *Fonctions affines par morceaux*
Soit $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine. Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F.

Exercice 7. *Somme de sous-espaces*
Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 8. $F \cap G = F' \cap G'$
Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E.
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 9. *Projection et symétrie dans $\mathbb{K}^3$*
Dans $\mathbb{K}^3$, on donne les sous espaces : $H = \{X = (x,y,z) \text{ tq } x + y + z = 0\}$ et $K = \mathrm{vect}(U = (1,1,2))$.
1) Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2) Démontrer que $H \oplus K = \mathbb{K}^3$.
3) Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_H et s_H.

Exercice 10. *sev de $\mathbb{K}_3[x]$*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.
1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.
2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.
3) Étudier le cas où $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 0$.

Exercice 11. *Caractérisation des sommes directes*
Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$. Généraliser.

Exercice 12. *Somme directe dans $E \Rightarrow$ somme directe dans $\mathcal{L}(E)$*
Soit $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ et $\mathcal{F}_i = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im}\, u \subset F_i\}$. Montrer que $\mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_n = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 13. *Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sev de E tels que $F_1 + \ldots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1, \ldots, G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n = E$.

Exercice 14. *Somme et intersection*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \ldots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.
1) Montrer que la somme $G = F_1 + \ldots + F_n$ est directe.
2) Comparer F et G.

Exercice 15. *Polynômes trigonométriques*
Soit E l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F le sev engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, et G le sev engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 16. *Intersection et somme de sev*
Soit E un ev de dimension finie et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E. On note $H = \bigcap_{i \in I} F_i$ et $S = \sum_{i \in I} F_i = \mathrm{vect}\big(\bigcup_{i \in I} F_i\big)$.
Montrer qu'il existe une partie finie, J, de I telle que : $H = \bigcap_{i \in J} F_i$ et $S = \sum_{i \in J} F_i$.

Exercice 17. *Supplémentaires*
Soit $E = H \oplus K$ et $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de K.
1) Montrer que pour tout $a \in H$, $K_a = \mathrm{vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est un supplémentaire de H.
2) Montrer que si $a \neq b$, alors $K_a \neq K_b$.

Exercice 18. $\dim H = \dim K \Leftrightarrow H$ *et* K *ont un supplémentaire commun*
Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun (par récurrence sur $\mathrm{codim}\, H$).

Exercice 19. *Supplémentaire commun, X MP* 2005*
1) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
  a) Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes pairs}\}$.
  A-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes impairs}\}$?
  b) Que peut-on dire si l'on remplace $Q(X^2)$ par une fonction f paire ?
2) Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

Exercice 20. *E n'est pas union de sous-espaces stricts*
Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $F_1, \ldots, F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \ldots \cup F_n$:
1) Traiter le cas $n = 2$.
2) Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et on choisit $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1})$ et $y \notin F_n$.
  a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \notin F_n$.
  b) Montrer que : $\forall i \leqslant n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
  c) Conclure.

Exercice 21. *Nombres algébriques*
On considère que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
1) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
2) Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.

Exercice 22. *Éléments algébriques*
Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ deux corps avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
1) Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
2) On suppose que α et β sont algébriques sur $\mathbb{K}$. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur $\mathbb{K}$ (étudier $\mathbb{K}[\alpha, \beta]$).

Exercice 23. *Corps emboîtés*

Soient $\mathbb{H} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ trois sous-corps de $\mathbb{C}$.

1) Montrer que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont des $\mathbb{H}$-ev et $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

2) Montrer que $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ si et seulement si $\mathbb{K}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ et $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

3) Application : Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, est un corps algébriquement clos (si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les coefficients de P).

Exercice 24. *Surcorps de* $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie.

1) Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.

2) Si $\dim \mathbb{A} > 1$ montrer que tout élément de $\mathbb{A}$ est algébrique de degré 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

solutions

Exercice 1.
$F = G$.

Exercice 2.
$x' = 2y + z$, $3y' = -x + z$, $3z' = -x + 3y + z$.

Exercice 3.
$r = 3$, $2a - 3b + 5c = b - 2d - e = 0$.

Exercice 5.
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$.

Exercice 7.
Il y a égalité.

Exercice 8.
L'intersection contient F.
Soit $u \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')$: $u = a + b = a' + b'$ avec $a, a' \in F$, $b \in G \cap F'$ et $b' \in G \cap G'$.
Alors $b - b' = a' - a \in F \cap G = F' \cap G'$, donc $b \in G'$, donc $b \in F' \cap G' \subset F$.

Exercice 9.
3) $\pi_H : \begin{cases} 4x' = 3x - y - z \\ 4y' = -x + 3y - z \\ 4z' = -2x - 2y + 2z, \end{cases} \qquad s_H : \begin{cases} 2x' = x - y - z \\ 2y' = -x + y - z \\ 2z' = -2x - 2y. \end{cases}$

Exercice 10.
3) Soit $p = \mathrm{car}(\mathbb{K})$.
Si $p = 2$ alors $F = G$ et $H = E$.
Si $p = 3$ alors $F = G$ et $F \oplus H = \{P \in E \text{ tq } p_1 = p_3\}$.
Si $p \geqslant 5$ alors $F = \mathrm{vect}(X^3 - 3X^2 + 2X)$, $G = \mathrm{vect}(X^3 - 6X^2 + 11X - 6)$, $H = \mathrm{vect}(1, X^2)$ et les deux questions sont justes.

Exercice 18.
$\operatorname{codim} H = 0$: supplémentaire $= \{0\}$.
$\operatorname{codim} H = p$: Soit $u \in E \setminus (H \cup K)$: $H \oplus \mathbb{K}u$ et $K \oplus \mathbb{K}u$ ont un supplémentaire commun, L, donc H et K ont un supplémentaire commun : $L \oplus \mathbb{K}u$.

Exercice 19.
1) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on décompose en $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$.
Alors $P = (P_1 + P_2)(X^2) - (1 - X)P_2(X^2) = (1 - X)P_1(X^2) + X(P_1 + P_2)(X^2)$, ce qui prouve que les deux sommes sont égales à $\mathbb{R}[X]$. Le caractère direct est immédiat.
b) Cela ne change pas A : les éléments de A sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur X près), indépendament du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
2) Soit f un isomorphisme de E_1 sur E_2 et $F = \{x - f(x) \text{ tq } x \in E_1\}$. Alors $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.