Équations linéaires

Exercice 1. *Systèmes avec paramètre*

Étudier l'existence de solutions des systèmes :

1) $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1). \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = a \\ x + 4y + 3z + 2t = b \\ 2x + y + 4z + 3t = c \\ 3x + 2y + z + 4t = d. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x\cos 2\alpha + y\cos\alpha + z = a \\ x\cos 2\beta + y\cos\beta + z = b \\ x\cos 2\gamma + y\cos\gamma + z = c. \end{cases}$

9) $\begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{cases}$

10) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x}{1+a} + \dfrac{y}{1+2a} + \dfrac{z}{1+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{2+a} + \dfrac{y}{2+2a} + \dfrac{z}{2+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{3+a} + \dfrac{y}{3+2a} + \dfrac{z}{3+3a} = 1. \end{cases}$

Exercice 2. *Système incompatible*

Soit $(S) \Leftrightarrow AX = B$ un système linéaire incompatible. Montrer que les lignes de A sont liées.

Exercice 3. *Combinaison de formes linéaires*

Soient $f, f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ linéairement indépendantes. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $Ker f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

Indication : Étudier le système $\begin{cases} f_1(x) &= 0 \\ & \vdots \\ f_p(x) &= 0 \\ f(x) &= 1. \end{cases}$

Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(f_1, \dots, f_p)$ libre ?

Exercice 4. *Orthogonal d'un sev*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F un sev de E^* dimension p.
On note $F^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall\, f \in F \text{ on a } f(x) = 0\}$. Chercher $\dim F^\perp$.

Exercice 5. *Système de Vandermonde*

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n scalaires distincts et M la matrice (α_i^{j-1}) (matrice de Vandermonde).
Montrer que M est inversible en interprétant le système $MX = 0$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[x]$.

Exercice 6. *Formule d'intégration numérique*

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_{t=2}^{4} P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Exercice 7. *Système non linéaire*

Résoudre le système : $\begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1 \\ x^4y^5z^{12} &= 2 \\ x^2y^2z^5 &= 3. \end{cases}$

1) Lorsque x, y, z sont réels strictement positifs.
2) Lorsque $x, y, z \in \mathbb{C}$.

solutions

Exercice 1.

1) Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$; compatible ssi $m \neq 2$.

2) Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$; compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.

3) Système de Cramer ssi $m \neq 1, \pm 2i$; compatible ssi $m \neq 1$.

4) Système de Cramer ssi $m \neq 0, -2$; sinon incompatible.

5) Système de Cramer ssi a, b, c sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi $d \in \{a, b, c\}$.

6) Système compatible ssi $3a + 2b + 2c + d = 0$.

7) Système de Cramer.

8) Système de Cramer ssi $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi les seconds membres correspondants sont égaux.

9) CN d'existence de solution : $p + q + r = 0$. C'est une CNS si la liste (a, b, c) comporte au plus un zéro.

10) Système de Cramer ssi $a \neq 1, -2$ et $b \neq 0$.
Pour $b = 0$: système incompatible.
Pour $a = 1$: système compatible ssi $b = 1$.
Pour $a = -2$: système compatibmle ssi $b = -2$.

11) Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{x}{X+a} + \dfrac{y}{X+2a} + \dfrac{z}{X+3a}$ avec $F(1) = F(2) = F(3) = 1$.
Il y a une solution unique si $a \neq 0$.

Exercice 6.

$\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Exercice 7.

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -4 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{-2}3^{6} \\ y = 2^{-3}3^{12} \\ z = 2^{2}3^{-7}. \end{cases}$