Dualité

Exercice 1. *Base de* $(\mathbb{K}^3)^*$
Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(X) = x+y-z$, $f_2(X) = x-y+z$, $f_3(X) = x+y+z$. On suppose $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2) Trouver la base duale.

Exercice 2. *Base de* $(\mathbb{K}^3)^*$
Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(X) = x+2y+3z$, $f_2(X) = 2x+3y+4z$, $f_3(X) = 3x+4y+6z$.
1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2) Trouver la base duale.

Exercice 3. *Base de* $(\mathbb{K}^n)^*$
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose $f_i(x) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(x) = x_n + x_1$. Déterminer si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $(\mathbb{K}^n)^*$ et le cas échéant, déterminer la base duale.

Exercice 4. *Bases de* $(\mathbb{K}_n[X])^*$
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base duale lorsque ...
1) $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires distincts.
2) $f_i(P) = P^{(i)}(0)$ (en supposant $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$).
3) $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires quelconques et $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$. Ne pas chercher la base duale pour cet exemple.

Exercice 5. *Base de* $(\mathbb{R}_{2n-1}[X])^*$
Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :

$$\varphi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(x_i) \end{cases} \qquad \psi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(x_i) \end{cases}$$

1) Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de E^*.
2) Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

Exercice 6. *Intégrale*
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\,\mathrm{d}t$.
1) Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
2) Trouver la base duale.

Exercice 7. *Évaluations et intégrale*
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a : P \mapsto P(a), \quad f_b : P \mapsto P(b), \quad f_c : P \mapsto P(c), \quad \varphi : P \mapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Exercice 8. *Base duale de* $(1, X, X(X-1), \dots)$
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et $E = \mathbb{K}_n[X]$.
On note pour $i \in [\![0, n]\!]$: $P_i = X(X-1)\dots(X-i+1)$ et $f_i : P \mapsto P(i)$.
1) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E et $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*.
2) Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathcal{B}$. On pourra utiliser les polynômes : $Q_i = \prod_{j \neq i}(X-j)$.
3) Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.

Exercice 9. *Base duale de* $((X-a)^k(X-b)^{n-k})$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

1) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.

2) On suppose $n = 2$, $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et on prend comme base de E^* : $\mathcal{B} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \dfrac{a+b}{2}$. Exprimer les formes linéaires (P_0^*, P_1^*, P_2^*) dans $\mathcal{B}$.

Exercice 10. *Formes linéaires liées*

Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 11. *Formes linéaires liées*

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto P'(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 12. $(P(X), \dots, P(X+n))$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $E = \mathbb{K}_n[X]$, $Q \in E$ de degré n et $Q_i = Q(X+i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

1) Montrer que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre.

2) Montrer que toute forme linéaire sur E peut se mettre sous la forme :
$f : P \mapsto \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \ldots + \alpha_n P^{(n)}(0)$ où $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires dépendant de f.

3) Soit $f \in E^*$ telle que $f(Q_0) = \ldots = f(Q_n) = 0$. Montrer que $f = 0$ (considérer le polynôme $P = \alpha_0 Q + \ldots + \alpha_n Q^{(n)}$ où $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont définis comme précédement).

4) Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E.

Exercice 13. $\varphi((X-a)P) = 0$

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.

1) Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\varphi((X-a)P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall\, P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(a)$.

2) Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\, P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$, $\varphi((X-a)^2 P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall\, P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

Exercice 14. *Forme linéaire sur les polynômes*

Montrer l'existence et l'unicité d'une forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = 1$ et $\Phi(P) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$.

Exercice 15. *Système unisolvent*

Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n fonctions linéairement indépendantes. On pose $E = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x). \end{cases}$

1) Montrer que la famille $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ engendre E^*.

2) En déduire qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det M \neq 0$ où M est la matrice de terme général $f_i(x_j)$.

Exercice 16. *Polynômes à deux variables*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale si elle est de la forme : $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$, la somme portant sur un nombre fini de termes. On admet l'unicité d'une telle écriture pour f. Le degré de f est alors $\max(i+j \text{ tq } a_{ij} \neq 0)$. On note E_k l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1) Montrer que E_k est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.

2) Soient $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$. Montrer que les formes linéaires $f \mapsto f(A)$, $f \mapsto f(B)$, $f \mapsto f(C)$ constituent une base de E_1^*.

3) Chercher de même une base de E_2^*.

4) Soit T le triangle plein ABC et $f \in E_1$. Montrer que $\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.

5) Chercher une formule analogue pour $f \in E_2$.

Exercice 17. *Polynômes trigonométriques*

On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$). Soit E_n l'espace engendré par la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1) Montrer que pour $k \geqslant 1$, (f_k, g_k) est libre.

2) Soit $\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ f & \longmapsto & f''. \end{cases}$ Chercher les sous-espaces propres de φ. En déduire que $\mathcal{F}_n$ est libre.

3) On note $a_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ et $\varphi_k : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(a_k). \end{cases}$

Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de E_n^*. On utilisera la fonction $f : x \mapsto \prod_{k=1}^n (\cos x - \cos a_k)$.

4) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ et $\psi_k : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(b_k). \end{cases}$ Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leqslant 2n+1$, et engendre E_n^* si et seulement si $N \geqslant 2n+1$.

Exercice 18. *Trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\varphi_A : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(AM). \end{cases}$

1) Montrer que $E^* = \{\varphi_A \text{ tq } A \in E\}$.

2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{S}^\circ = \{\varphi_A \text{ tq } A \in \mathcal{A}\}$ et $\mathcal{A}^\circ = \{\varphi_A \text{ tq } A \in \mathcal{S}\}$.

Exercice 19. *Suites de Fibonacci*

Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

2) Soient $f_0 : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u_0 \end{cases}$ et $f_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u_1. \end{cases}$ Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Exercice 20. *Orthogonaux d'une somme directe*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.

1) Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.

2) Montrer que F° est naturellement isomorphe à G^* et G° à F^*.

Exercice 21. *$f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.

Exercice 22. *p formes linéaires*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que :

$$\forall\, x \in E,\ (f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0) \Rightarrow (x = 0).$$

Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p.

Exercice 23. $\det(f_i(u_j)) \neq 0$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $u_1, \dots, u_n \in E$ et $f_1, \dots, f_n \in E^*$.

Soit M la matrice de terme général $f_i(u_j)$. Montrer que si $\det M \neq 0$, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^*.

Exercice 24. *e_n^* imposé*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une famille libre de E et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Montrer qu'on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $f = e_n^*$ si et seulement si $f(e_1) = \ldots = f(e_{n-1}) = 0$. Y a-t-il unicité de e_n ?

Exercice 25. *Modification élémentaire*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ déduite de $\mathcal{B}$ par une opération élémentaire (échange de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul, addition à un vecteur d'un multiple d'un autre).

Étudier comment on passe de la base duale $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ en fonction de l'opération effectuée.

Exercice 26. *Séparation*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1) Soient $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

2) Soit V un sev de E^* ayant la propriété : $\forall\, x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow \exists\, f \in V$ tq $f(x) \neq f(y)$.
Montrer que $V = E^*$.

solutions

Exercice 1.

2) $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 2.

2) $(-2, 0, 1)$, $(0, 3, -2)$, $(1, -2, 1)$.

Exercice 3.

Base ssi n est impair et $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. $2e_1 = (1, 1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$ et les autres vecteurs s'obtiennent par rotation : $2e_2 = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, \ldots, 1)$.

Exercice 5.

2) $\varphi_i^* = (1 - 2d_i(X - x_i))P_i^2$, $\psi_i^* = (X - x_i)P_i^2$.

Exercice 6.

2) $\frac{1}{8}(9 - 15X^2)$, $\frac{1}{8}(75X - 105X^3)$, $\frac{1}{8}(-15 + 45X^2)$, $\frac{1}{8}(-105X + 175X^3)$.

Exercice 7.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & b & c & (b^2-a^2)/2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (b^3-a^3)/3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = \frac{1}{12}(b-a)^4(c-a)(c-b)(2c-a-b)$, donc la famille est libre si et seulement si $c \neq \dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 8.

2) terme dominant : $P_n^*(Q_i) = 1$, donc $P_n^* = \sum_{i=0}^n \dfrac{f_i}{Q_i(i)} = \sum_{i=0}^n \dfrac{(-1)^{n-i} f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3) $P_k^* = \sum_{i=0}^k \dfrac{(-1)^{k-i} f_i}{i!\,(k-i)!}$.

Exercice 9.

2) $P_0^* = \dfrac{f_a}{(b-a)^2}$, $P_1^* = \dfrac{f_a + f_b - 4f_c}{(b-a)^2}$, $P_2^* = \dfrac{f_b}{(b-a)^2}$.

Exercice 16.

1) $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3) $(\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'})$ où A', B', C' sont les milieux du triangle ABC.

5) $\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{f(A') + f(B') + f(C')}{6}$.

Exercice 17.

3) Rmq : coefficients de Fourrier : $\alpha_p = \dfrac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\cos(pa_k)$ et $\beta_p = \dfrac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\sin(pa_k)$.

Exercice 19.

2) $\left(\dfrac{\varphi^{n-1} - \bar\varphi^{n-1}}{\varphi - \bar\varphi}, \dfrac{\varphi^n - \bar\varphi^n}{\varphi - \bar\varphi}\right)$ avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt5}{2}$, $\bar\varphi = \dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

Exercice 25.

$e_i \leftrightarrow e_j$:	$e_i^* \leftrightarrow e_j^*$.
$e_i \leftarrow \alpha e_i$:	$e_i^* \leftarrow e_i^*/\alpha$.
$e_i \leftarrow e_i + \alpha e_j$:	$e_j^* \leftarrow e_j^* - \alpha e_i^*$.